

# Matematyczne metody fizyki II

## Zadania domowe 1

**1.1.** Proszę wykazać, że

(a)  $|z + 6 + 8i| < 13$ , gdy  $|z| = 2$ ,

(b)  $1 \leq |z^2 - 3| \leq 4$ , gdy  $|z| = 1$

**1.2** Proszę wyznaczyć pierwiastki równań:

(a)  $z^2 - (3 - i)z + (4 - 3i) = 0$ ,

(b)  $z^2 - (3 - i)z + (2 + i) = 0$ ,

(c)  $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$ ,

(d)  $2x + (2 + 3i)(x + y) = 7 + i$ .

(e)  $|z| - z = 2 + i$ ,

(f)  $|z^2| + 1 + 12i = 6z$

**1.3** Proszę przedstawić graficznie zbiory punktów, które spełniają warunki:

(a)  $-1 < \Im\{z\} < 2$ ,

(b)  $-1 < \Re\{z\} < 2$ ,

(c)  $\Re\{z\} < \Im\{z\}$ ,

(d)  $\Re\{z + iz\}$

(e)  $|z - 1| = \Re\{z + 1\}$ ,

(f)  $|z + 1| = |z - 1|$ ,

(g)  $|z + 1| < |z - 1|$ ,

(i)  $|z + 2| + |z - 6| = 10$ ,

(j)  $\arg\{z\} = \pi/4$ ,

(k)  $\pi/6 < \arg\{z\} < \pi/3$ .

**1.4** Proszę znaleźć część rzeczywistą  $u(x, y)$  oraz część urojoną  $v(x, y)$  następujących funkcji zespolonych:

(a)  $f(z) = 6z - 5 + 9i$ ,

(b)  $f(z) = z^3 - 2z + 6$ ,

(c)  $f(z) = z^2 + z^{*2}$ ,

(d)  $f(z) = z^*/(z + 1)$ .

(e)  $f(z) = z + 1/z$ .

**1.5** Proszę obliczyć następujące granice:

- (a)  $\lim_{z \rightarrow 2i} z^{-} z^*$ ,
- (b)  $\lim_{z \rightarrow i} z - z^*/(z + z^*)$ ,
- (c)  $\lim_{z \rightarrow e^{i\pi/4}} z + 1/z$ ,
- (d)  $\lim_{z \rightarrow \infty} (z^2 + iz - 2)/[z^2(1 + 2i)]$ ,
- (e)  $\lim_{z \rightarrow \infty} (iz + 1)/(2z - i)$ .

**1.6** Proszę sprawdzić ciągłość funkcji zespolonej  $f(z)$  w punktach:

- (a)  $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i$ ,  $z_0 = 2 - i$ ,
- (b)  $f(z) = z^3 - 1/z$ ,  $z_0 = 3i$ ,
- (c)  $f(z) = (z^2 + 1)/(z + i)$ ,  $z_0 = -i$ ,

**1.7** Proszę pokazać, że

- (a)  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$
- (b)  $|\operatorname{sh} z|^2 = \operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y$

*Bartłomiej Spisak*