

Matematyczne metody fizyki 2

Zestaw 4

4.1. Proszę obliczyć całki

a) $I = \int_C dz \frac{\sin z}{z^2 + 1}$, gdzie $C = K(0, 2)$,

b) $I = \int_C dz \frac{\exp[z]}{(z + 2)^4}$, gdzie C – dowolny kontur gładki zawierający we wnętrzu punkt $z = (-2, 0)$,

c) $\int_C dz \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$, gdzie $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$,

korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego lub jego uogólnienia. We wszystkich przypadkach należy przyjąć, że kontur jest zorientowany dodatnio.

4.2. Proszę rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z - 1}$$

w szereg Taylora w otoczeniu punktu -2 i znaleźć koło zbieżności dla otrzymanego szeregu.

4.3. Proszę rozwinąć funkcję

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z + 1| < \infty\}$.

4.4. Proszę wskazać i sklasyfikować punkty osobliwe następujących funkcji

a) $f(z) = z^2(z^2 + 2)^{-2}$,

b) $f(z) = (z \sin z)^{-1}$.

4.5. Proszę obliczyć residua następujących funkcji

a) $f(z) = z(z^2 + \pi^2)^{-1}$,

b) $f(z) = z(e^z - 1)^{-1}$.

4.6. Proszę obliczyć całkę

$$\oint_C dz \frac{1}{z^3(z^2 + 2)}$$

korzystając z twierdzenia o residuach. Kontur C jest trójkątem o wierzchołkach: $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(0, 2)$.