

Matematyczne metody fizyki 2

Zestaw 5

5.1. Proszę wykazać, że

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Wskazówka:

Rozważyć prawą stronę tej równości, a następnie użyć przedstawienia całkowitego dla obu funkcji Γ .

5.2. Proszę udowodnić, że wartość całki Poissona jest równa $\Gamma(1/2)$.

5.3. Proszę przedstawić całkę niewłaściwą

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} dx e^{-x^\alpha}, \quad \text{gdzie } \alpha > 0$$

za pomocą funkcji $\Gamma(x)$

5.4. Proszę pokazać, że

$$\left| \left(-\frac{1}{2} + iy \right)! \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi y}.$$

5.5. Proszę obliczyć wartości całek

a) $I = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^4}},$

b) $I = \int_0^{\pi/2} d\theta (\operatorname{tg}^3 \theta + \operatorname{tg}^5 \theta) e^{-\operatorname{tg}^2 \theta},$

c) $I = \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{(1+x^3)^4},$

d) $I_p = \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{tg}^p \theta$

opierając się na *odpowiednich* funkcjach Eulera.