20. 04. 2015

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

1.1. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

a) $d_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } |x| < 1/(2n) \\ 0, & \text{dla } |x| > 1/(2n), \end{cases}$

b) $d_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\big[-n^2x^2\big]$,

c) $d_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} dk\, \exp[ikx]$,

d) $d_n(x) = \dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$,

można użyć do określenia dystrybucji δ–Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt *c*) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów, jeden do wyboru.

1.2. Proszę wykazać następujące własności δ–Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$,

b) $x\delta(x) = 0$,

c) $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \dfrac{1}{\big|f'(x_n)\big|}\delta(x - x_n)$,
gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$,

d. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\delta(x - x_0) = \varphi(x_0)$.

1.3. Proszę obliczyć

a. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\delta(-ax + b)$,

b. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\delta(x^2 - 4)$,

c. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\delta(\cos x)$.

1.4. Korzystając z faktu, że pierwsza i n-ta pochodna dystrybucji T wyrażają się odpowiednio wzorami

a) $\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle$,
b) $\langle T^{(n)}|\varphi\rangle = (-1)^n\langle T|\varphi^{(n)}\rangle$,

proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,
b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Bartłomiej Spisak