20. 04. 2015

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

1.1. Proszę przeprowadzić ortonormalizację dla poniższych ciągów funkcji:

a) $1,\ \tan\alpha,\ \tan^2\alpha,\ \tan^3\alpha,\ \tan^4\alpha$ na przedziale $[-\pi/4, \pi/4]$ z iloczynem skalarnym,

$$\langle p|q\rangle = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx\, \frac{p\,(x)\,q\,(x)}{\cos^2 x},$$

b) $\sin x$, $\sin^3 x$, $\sin^5 x$ na przedziale $[0, \pi]$ z iloczynem skalarnym,

$$\langle p|q\rangle = \int_0^{\pi} dx\; p\,(x)\,q\,(x)\,,$$

używając procedury Grama-Schmidta.

1.2. Proszę wykazać następujące własności wielomianów Berensteina $B_{k,n}(t)$:

a) $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}\,(t) = 1$,

b) $B_{k,n}\,(t) = tB_{k-1,n-1}\,(t) + (1-t)\,B_{k,n-1}\,(t)$,

c) $B'_{k,n}\,(t) = nB_{k-1,n-1}\,(t) - nB_{k,n-1}\,(t)$,

d) $\int_0^1 B_{k,n}\,(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$.

1.3. Proszę wykazać, że ciąg funkcyjny:

$$d_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} dk\ \exp\,[ikx]$$

możne zostać użyty do określenia dystrybucji δ–Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0).$$

1.4. Proszę wykazać następujące własności δ–Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$,

b) $x\delta(x) = 0$,

c) $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \dfrac{1}{\big|f'(x_n)\big|}\delta(x - x_n)$,

gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$,

d) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\; \varphi(x)\delta(x - x_0) = \varphi(x_0)$.

1.5. Proszę obliczyć

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\delta(-ax+b)$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\delta(x^2-4)$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\delta(\cos x)$.

1.6. Korzystając z faktu, że pierwsza i n-ta pochodna dystrybucji T wyrażają się odpowiednio wzorami

a) $\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle$,

b) $\langle T^{(n)}|\varphi\rangle = (-1)^n\langle T|\varphi^{(n)}\rangle$,

proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,

b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Bartłomiej Spisak, Marcin Guzik