24. 04. 2017

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

1.1. Proszę wykazać że zbiór wielomianów stopnia n wraz z działaniami dodawania i mnożenia przez stałą określonymi w sposób standardowy stanowi przestrzeń liniową. Czy uzyskany wynik może zostać podtrzymany, gdy określone powyżej działanie dodawania dwóch wielomianów zostanie zastąpione ich średnią?

1.2. Proszę wyprowadzić wzory potrzebne do procedury Grama-Schmidta stosując notację Diraca, a następnie przeprowadzić ortogonalizację dla wielomianów: $1, x, x^2, x^3$ na przedziale $x \in [-1, 1]$ z iloczynem skalarnym,

$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} dx \; p\left(x\right) q\left(x\right),$$

używając tej procedury.

1.3. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

a) $d_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } |x| < 1/(2n) \\ 0, & \text{dla } |x| > 1/(2n), \end{cases}$

b) $d_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\big[-n^2x^2\big],$

c) $d_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-n}^{n} dk \; \exp\left[ikx\right],$

d) $d_n(x) = \dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+n^2x^2},$

można użyć do określenia dystrybucji δ–Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt c) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów, jeden do wyboru.

1.4. Proszę wykazać następujące własności δ–Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$,

b) $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \dfrac{1}{\big|f'(x_n)\big|}\delta(x - x_n)$,
gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$.

Następnie proszę zastosować powyższe własności do obliczenia całek typu

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x)\delta(-ax + b)$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\delta(x^2 - 4)$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\delta(\cos x)$.

1.5. Korzystając z faktu, że pierwsza i n-ta pochodna dystrybucji T wyrażają się odpowiednio wzorami

a) $\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle$,

b) $\langle T^{(n)}|\varphi\rangle = (-1)^n\langle T|\varphi^{(n)}\rangle$,

proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,

b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Bartłomiej Spisak