

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

- 1.1. Proszę wykazać, że zbiór wielomianów stopnia n wraz z działaniami dodawania i mnożenia przez stałą określonymi w sposób standardowy stanowi przestrzeń liniową. Czy uzyskany wynik może zostać podtrzymany, gdy określone powyżej działanie dodawania dwóch wielomianów zostanie zastąpione ich średnią?
- 1.2. Proszę wyprowadzić wzory potrzebne do procedury Grama-Schmidta stosując notację Diraca, a następnie przeprowadzić ortogonalizację dla wielomianów: $1, x, x^2, x^3$ na przedziale $x \in [-1, 1]$ z iloczynem skalarnym

$$\langle p|q \rangle = \int_{-1}^1 dx p(x)q(x),$$

używając tej procedury.

- 1.3. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

$$\text{a) } d_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } |x| < 1/(2n) \\ 0, & \text{dla } |x| > 1/(2n), \end{cases}$$

$$\text{b) } d_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp[-n^2 x^2],$$

$$\text{c) } d_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk \exp[ikx],$$

$$\text{d) } d_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2},$$

można użyć do określenia dystrybucji δ -Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt c) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów, jeden do wyboru.

1.4. Proszę wykazać następujące własności δ -Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$,

b) $x\delta(x) = 0$,

c) $\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n)$,

gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$,

d) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x)\delta(x - x_0) = \varphi(x_0)$.

Następnie proszę zastosować powyższe własności do obliczenia całek typu

a. $\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x)\delta(-ax + b)$,

b. $\int_{-\infty}^{\infty} dx x\delta(x^2 - 4)$,

c. $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2\delta(\cos x)$.

1.5. Korzystając z faktu, że pierwsza i n -ta pochodna dystrybucji T wyrażają się odpowiednio wzorami

a) $\langle T'|\varphi \rangle = -\langle T|\varphi' \rangle$,

b) $\langle T^{(n)}|\varphi \rangle = (-1)^n \langle T|\varphi^{(n)} \rangle$,

proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,

b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.