16. 04. 2020

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

1.1. Proszę udowodnić, że zbiór funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \ni [a, b] \to \mathbb{C}$ z działaniami określonymi wzorami

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x),$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$ i $\alpha \in \mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb $\mathbb{C}$.

1.2. Niech $C[0, 1]$ jest przestrzenią funkcji $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ciągłych na $[0, 1]$. Przyjmując, że norma w tej przestrzeni jest określona wzorem

$$\|f\| = \left[\int_0^1 dx\ |f(x)|^2\right]^{1/2},$$

proszę wyznaczyć odległość funkcji $f, g \in C[0, 1]$, gdy

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x$,

b) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 + x$.

1.3. Proszę wyprowadzić wzory potrzebne do procedury Grama-Schmidta, a następnie przeprowadzić ortogonalizację dla wielomianów $p_i(x)$ następująco określonych: $p_0(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, p_4(x) = x^3$ na przedziale $x \in [-1, 1]$ z iloczynem skalarnym w postaci

$$\langle p_i | p_j \rangle = \int_{-1}^1 dx\ p_i(x) p_j(x).$$

Uzyskane wielomiany proszę unormować tak aby stanowiły zbiór ortonormalny.

1.4. Proszę przeprowadzić dyskusję samosprzężoności (hermitowskości) operatorów różniczkowych

$$\hat{D}^2_- = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \hat{D}^2_+ = \frac{d^2}{dx^2}$$

w przestrzeni $L^2(\Omega)$, gdzie $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ i zastanowić się nad rolą warunków brzegowych w tym zagadnieniu.

1.5. Niech operator różniczkowy drugiego rzędu $\hat{L}$ jest określony wzorem

$$\hat{L} = -\frac{d}{dx}\left[e^x \frac{d}{dx}\right] - \frac{1}{4} e^x$$

Proszę znaleźć wartości własne równania

$$\hat{L} y(x) = \lambda y(x)$$

jeżeli warunki brzegowe mają postać:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{d}{dx} y(x) + \frac{1}{2} y(x) \right|_{x=1} = 0.$$

1.6. Proszę uzasadnić, że operator w postaci

$$(\hat{U}_t f)(x) = f(x-t),$$

działający na przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, jest operatorem *unitarnym.*

1.7. Operator całkowy w postaci

$$(\hat{V}f)(x) = \int_0^x f(y)dy,$$

w przestrzeni $L^2([0,1])$ jest nazywany operatorem Volterry. Proszę znaleźć operator sprzężony do tego operatora oraz rozwiązać problem własny

$$\hat{V}^*\hat{V}f = \lambda f,$$

dla $f \neq 0$.

Bartłomiej Spisak, Maciej Kalka