

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 2

2.1. Proszę znaleźć rozwinięcie funkcji określonych na przedziale $(0, \pi]$:

a) $f(x) = 1,$

b) $f(x) = x,$

c) $f(x) = x^2,$

w sinusowy i cosinusowy szereg Fouriera.

2.2. W niektórych zagadnieniach wygodnie jest aproksymować $\sin(\pi x)$ na przedziale $[0, 1]$ przez parabolę $ax(1-x)$, gdzie a jest pewna stałą. Aby mieć lepsze *wyczucie* do stosowania takiego przybliżenia, proszę rozwinąć funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x(1+x), & -1 \leq x \leq 0, \end{cases}$$

w sinusowy szereg Fouriera

2.3. Proszę wyznaczyć transformatę Fouriera z funkcji $f(x) = \exp[-\alpha x^2]$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

2.4. Proszę wyznaczyć transformatę Fouriera z funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

2.5. Proszę wyznaczyć transformatę Fouriera z funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \pi - |x|, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

2.6. Proszę wykazać, że iloczyn skalarny dwóch funkcji jest równy iloczynowi skalarnemu ich transformat Fouriera.

2.7. Proszę wykazać, że transformata Fouriera ze splotu dwóch funkcji jest równa iloczynowi ich transformat Fouriera.