20. 04. 2020

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 2

2.1. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

a) $d_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} dk \, \exp[ikx]$,

b) $d_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-n^2x^2\right]$,

c) $d_n(x) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2x^2}$,

można użyć do określenia dystrybucji δ–Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x)\delta(x) = \varphi(0).$$

2.2. Jądrem Fejera nazywamy ciąg funkcyjny w postaci[1]

$$\delta_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2. \tag{1}$$

Proszę wykazać, że ciąg $\delta_n(t)$ może być użyty do okeślenia dystrybucji δ–Diraca zgodnie ze wzorem

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \; f(t)\delta_n(t) = f(0). \tag{2}$$

2.3. Proszę wykazać następujące własności δ–Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta(x)$,

b) $x\delta(x) = 0$,

c) $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \frac{1}{\left|f'(x_n)\right|}\delta(x-x_n)$,gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$,

d) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x)\delta(x-x_0) = \varphi(x_0)$.

Następnie proszę zastosować powyższe własności do obliczenia całek typu

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi(x)\delta(-ax+b)$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x\delta(x^2-4)$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2\delta(\cos x)$.

[1] Jest ono wykorzystywane przy określaniu zbieżności szeregów Fouriera w sensie sumy Cesaro.

2.4. Proszę wykazać, że

$$\langle T^{(n)}|\varphi\rangle = (-1)^n \langle T|\varphi^{(n)}\rangle.$$

2.5. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,

b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

2.6. Proszę wykazać, że ciąg funkcyjny

$$t_n(x) = \frac{n}{2\cosh^2(nx)} \tag{3}$$

spełnia warunek normalizacyjny

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; t_n(x) = 1. \tag{4}$$

Następnie proszę wykazać, że spełniona jest równość

$$\int_{-\infty}^{x} dx\; t_n(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(nx)) \equiv u_n(x). \tag{5}$$

Proszę uzasadnić, że dla $n \to \infty$ ciąg funkcyjny $u_n(x)$ można użyć do określenia „funkcji" Heaviside'a zgodnie z wzorem

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ 1, & \text{dla } x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Bartłomiej Spisak, Maciej Kalka