04. 05. 2015

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 3

3.1. Cząstka o masie m porusza się pod wpływem siły $F = F_0\theta(t)$ zgodnie z równaniem Newtona w ośrodku schrakteryzowanym przez siłę tarcia, która jest proporcjonalna do prędkości. Zakładając jednopunktowe warunki brzegowe w postaci: $x(0) = 0$ i $x'(0) = 0$, proszę wyznaczyć trajektorię cząstki w przestrzeni fazowej (położenie – pęd), rozwiązując równania Newtona techniką transformat Laplace'a.

3.2. Równanie ruchu dla ułamkowego oscylatora harmonicznego z zaburzeniem typu delta Diraca ma postać

$$x''(t) + \beta\, {}_a^C D_t^\alpha[x(t)] + \omega^2 x(t) = \delta(t)$$

gdzie ${}_a^C D_t^\alpha[x(t)]$ jest pochodną Caputo, natomiast $0 < \alpha < 1$. Proszę znaleźć rozwiązanie tego równania dla $t > 0$, zakładając jednopunktowe warunki brzegowe w postaci: $x(0) = x_0$ i $x'(0) = v_0$.
Wskazówka: Zastosować do równania różniczkowego transformatę Laplace'a.

3.3. Proszę wykazać, że jeżeli funkcja $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ i znika na krańcach przedziału określoności, to iloczyn niepewności spełnia nierówność

$$(\Delta x)^2(\Delta k)^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

gdzie $(\Delta x)^2$ jest dyspersją zmiennej x natomiast $(\Delta k)^2$ jest dyspersją zmiennej k.
Wskazówka: Jest to nierówność Heisenberga.

3.4. Proszę wyznaczyć transformatę Wignera

$$\rho_W(x,k) = \int dX\ f^*\left(x - \frac{1}{2}X\right) f\left(x + \frac{1}{2}X\right) e^{-ikX}$$

z funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta x^2}} \exp\left[-\frac{1}{4\Delta x^2}\big(x - \langle x\rangle\big)^2 + i\langle k\rangle\left(x - \frac{1}{2}\langle x\rangle\right)\right].$$

3.5. Proszę obliczyć transformatę Fouriera z funkcji

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2 + \lambda^2},$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i $\lambda^2 > 0$.

3.6. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla $(1+1)$-wymiarowego równania dyfuzji

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

Wskazówka: W dowolnej chwili t gęstość cząstek $n(x,t)$ można wyrazić przez

$$n(k,t) = \int dx\, n(x,t) e^{-ikx}.$$

3.7. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla równania Gaussa,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0,$$

opisującego pole elektromagnetyczne w próżni.

Wskazówka: W dowolnej chwili t natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ można wyrazić przez

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, \mathcal{E}(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Bartłomiej Spisak