09. 05. 2016

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 4

4.1. Proszę pokazać, że jeżeli energia potencjalna ma postać separowalną we współrzędnych kartezjańskich, tzn. można ją zapisać w postaci

$$U(\mathbf{r}) = U(x) + U(y) + U(z),$$

to zastosowanie metody separacji zmiennych pozwala sprowadzić niezależne od czasu równania Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

do układu trzech niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych.

4.2. Nieskończony walec kołowy o promieniu a jest naładowany elektrycznie w ten sposób, że rozkład potencjału na jego powierzchni zależy od kąta φ, tzn.

$$V(a, \varphi) = f(\varphi),$$

gdzie $f(\varphi)$ jest daną funkcją.
Proszę znaleźć potencjał $V(r, \varphi)$ pola elektrostatycznego:

a) wewnątrz walca,

b) na zewnątrz walca.

4.3. Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu a utrzymywany jest potencjał $V_0(\vartheta)$. Proszę znaleźć potencjał

a) wewnątrz powłoki kulistej,

b) na zewnątrz powłoki kulistej.

4.4. Proszę znaleźć rozkład temperatury w kuli o promieniu R, jeżeli wiadomo, że $T(\mathbf{r})$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0.$$

Temperatura na powierzchni kuli wynosi

$$T(R, \vartheta, \varphi) = T_0 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi,$$

gdzie r, ϑ, φ są współrzędnymi sferycznymi.

4.5. Proszę znaleźć rozwiązanie (1+1) – wymiarowego równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$

metodą separacji zmiennych, gdy funkcja $T(x,t)$ spełnia warunki:

$$\begin{aligned} T(0,t) &= 0, \\ \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a} &= 0, \\ T(x,0) &= T_0 \sin^3(\pi x/2a). \end{aligned}$$

4.6. Ogólne wyrażenie na wychylenie poprzeczne struny o długości L zamocowanej w punktach 0 i L ma postać:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[C_{1n}\cos\omega_n t + C_{2n}\sin\omega_n t\right],$$

gdzie $k_n = n\pi/L$, $\omega_n = ck_n$.
Proszę sformułować odpowiednie warunki, wiedząc o tym, że początkowe odkształcenie struny jest w kształcie trójkąta, którego wierzchołek, o wysokości h odpowiada punktowi x_0, a odciągniętą strunę puszczamy bez nadania jej prędkości początkowej. Znaleźć rozwiązanie spełniające te warunki.

Bartłomiej Spisak, Marcin Gużik