07. 06. 2018

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 4

4.1. Proszę pokazać, że jeżeli energia potencjalna ma postać separowalną we współrzędnych kartezjańskich, tzn. można ją zapisać w postaci

$$U(\mathbf{r}) = U(x) + U(y) + U(z),$$

to zastosowanie metody separacji zmiennych pozwala sprowadzić niezależne od czasu równania Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

do układu trzech niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych.

4.2. Nieskończony walec kołowy o promieniu a jest naładowany elektrycznie w ten sposób, że rozkład potencjału na jego powierzchni zależy od kąta φ, tzn.

$$V(a, \varphi) = f(\varphi),$$

gdzie $f(\varphi)$ jest daną funkcją.
Proszę znaleźć potencjał $V(r, \varphi)$ pola elektrostatycznego:

a) wewnątrz walca,

b) na zewnątrz walca.

4.3. Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu a utrzymywany jest potencjał $V_0(\vartheta)$. Proszę znaleźć potencjał

a) wewnątrz powłoki kulistej,

b) na zewnątrz powłoki kulistej.

4.4. Proszę znaleźć rozkład temperatury w kuli o promieniu R, jeżeli wiadomo, że $T(\mathbf{r})$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0.$$

Temperatura na powierzchni kuli wynosi

$$T(R, \vartheta, \varphi) = T_0 \sin^2\vartheta \sin 2\varphi,$$

gdzie r, ϑ, φ są współrzędnymi sferycznymi.

4.5. Membrana (krążek z gumy o promieniu a) wykonuje drgania; brzeg ($r = a$) pozostaje unieruchomiony. Proszę znaleźć częstości własne drgań.
Jak zmieni się sytuacja jeżeli w środku membrany wycięty jest kołowy otwór o promieniu a_0?
Wskazówka:
Ogólne rozwiązanie równania Bessela to kombinacja liniowa funkcji: $J_m(kx)$ i $Y_m(kx)$. Funkcja $Y_m(kx)$ zachowuje się podobnie jak $J_m(kx)$ dla dużych wartości argumentu, natomiast w zerze $\lim_{kx \to 0} Y_m(kx) = \infty$.

Bartłomiej Spisak