06. 05. 2020

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 4

4.1. Proszę obliczyć transformatę Fouriera z impulsu trójkątnego w postaci

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x/2| & \text{dla } x \in [-2;2] \\ 0 & \text{gdzie indziej.} \end{cases} \tag{1}$$

Nastepnie korzystając z uzyskanego wyniku oraz ze związku transformaty Fouriera z iloczynem skalarnym (zadanie 3.5) proszę obliczyć wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4. \tag{2}$$

4.2. Cząstka o masie m porusza się pod wpływem siły $F = F_0\theta(t)$ zgodnie z równaniem Newtona w ośrodku schrakteryzowanym przez siłę tarcia, która jest proporcjonalna do prędkości. Zakładając jednopunktowe warunki brzegowe w postaci: $x(0) = 0$ i $x'(0) = 0$, proszę wyznaczyć trajektorię cząstki w przestrzeni fazowej (położenie – pęd), rozwiązując równania Newtona techniką transformat Laplace'a.

4.3. Proszę obliczyć transformatę Fouriera z funkcji

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2 + \lambda^2},$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i $\lambda^2 > 0$.

4.4. Proszę obliczyć transformatę Fouriera ze sferycznie-symetrycznego potencjału Yukawy w postaci

$$U_Y(\mathbf{r}) = U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}, \tag{3}$$

a następnie korzystając z uzyskanego wyniku proszę wyznaczyć transformatę Fouriera z potencjału Coulomba

$$U_C(r) = \frac{U_0}{r}. \tag{4}$$

4.5. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla równania Poissona w postaci

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \tag{5}$$

4.6. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla $(1+1)$-wymiarowego równania dyfuzji

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

Wskazówka: W dowolnej chwili t gęstość cząstek $n(x,t)$ można wyrazić przez

$$n(k,t) = \int dx\, n(x,t)e^{-ikx}.$$

4.7. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla równania Gaussa,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0,$$

opisującego pole elektromagnetyczne w próżni.
Wskazówka: W dowolnej chwili t natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ można wyrazić przez

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \mathcal{E}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Bartłomiej Spisak, Maciej Kalka