

# Matematyczne metody fizyki 3

## Zestaw 5

- 5.1. Naładowaną kulę o promieniu  $a$  umieszczono w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu  $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{k}}$ , gdzie  $\hat{\mathbf{k}}$  jest wersorem wzdłuż osi  $Oz$ . Pod wpływem pola w kuli powstanie ładunek indukowany, który zmieni pole w pobliżu kuli. Proszę znaleźć potencjał na zewnątrz kuli. Warunki brzegowe mają postać:

$$V(a) = 0,$$

$$V(r) \longrightarrow -E_0 r \cos \vartheta, \text{ dla } r \gg a.$$

- 5.2. Membrana (krążek z gumy o promieniu  $a$ ) wykonuje drgania; brzeg ( $r = a$ ) pozostaje unieruchomiony. Proszę znaleźć częstotliwości własne drgań. Jak zmieni się sytuacja jeżeli w środku membrany wycięty jest kołowy otwór o promieniu  $a_0$ ?

Wskazówka:

Ogólne rozwiązanie równania Bessela to kombinacja liniowa funkcji:  $J_m(kx)$  i  $Y_m(kx)$ . Funkcja  $Y_m(kx)$  zachowuje się podobnie jak  $J_m(kx)$  dla dużych wartości argumentu, natomiast w zerze  $\lim_{kx \rightarrow 0} Y_m(kx) = \infty$ .

- 5.3. Oddziaływanie między protonem a neutronem w odległości  $r$  opisuje potencjał

$$U(r) = -A \exp[-r/a].$$

Proszę znaleźć funkcję radialną  $R(r)$ , dla stanu związanego w przypadku  $l = 0$ .

Wskazówka:

- zapisać równanie Schrödingera we współrzędnych sferycznych,
- wyprowadzić równanie na pomocniczą funkcję  $u(r) = rR(r)$ ,
- wprowadzić nową zmienną w postaci  $\rho = e^{-r/2a}$ .

- 5.4. Proszę wyznaczyć potencjał  $V(r, z)$  pola elektrostatycznego wewnątrz cylindra. Potencjały podstaw  $z = 0$  i  $z = l$  są równe zeru, a potencjał powierzchni bocznej  $r = a$  wynosi  $V_0 > 0$ .

Wskazówka:

Ogólne rozwiązanie równania radialnego to kombinacja liniowa funkcji:  $I_0(kr)$  i  $K_0(kr)$ , gdzie  $I_0(kr)$  – zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu,  $K_0(kr)$  – zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu.

- 5.5. Płaski krążek o promieniu  $a$  leży w płaszczyźnie  $x - y$  i  $z = 0$ . Potencjał krążka wynosi  $V_0$ , natomiast reszta płaszczyzny  $z = 0$  ma potencjał  $V = 0$ . Proszę znaleźć potencjał dla  $z > 0$ .