23. 05. 2016

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 5

5.1. Naładowaną kulę o promieniu a umieszczono w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{k}}$, gdzie $\hat{\mathbf{k}}$ jest wersorem wzdłuż osi $0z$. Pod wpływem pola w kuli powstanie ładunek indukowany, który zmieni pole w pobliżu kuli. Proszę znaleźć potencjał na zewnątrz kuli. Warunki brzegowe mają postać:

$$V(a) = 0,$$
$$V(r) \longrightarrow -E_0 r \cos\vartheta, \text{ dla } r >> a.$$

5.2. Membrana (krążek z gumy o promieniu a) wykonuje drgania; brzeg ($r = a$) pozostaje unieruchomiony. Proszę znaleźć częstości własne drgań.
Jak zmieni się sytuacja jeżeli w środku membrany wycięty jest kołowy otwór o promieniu a_0?
Wskazówka:
Ogólne rozwiązanie równania Bessela to kombinacja liniowa funkcji: $J_m(kx)$ i $Y_m(kx)$. Funkcja $Y_m(kx)$ zachowuje się podobnie jak $J_m(kx)$ dla dużych wartości argumentu, natomiast w zerze $\lim\limits_{kx\to 0} Y_m(kx) = \infty$.

5.3. Oddziaływanie między protonem a neutronem w odległości r opisuje potencjał

$$U(r) = -A \exp\left[-r/a\right].$$

Proszę znaleźć funkcję radialną $R(r)$, dla stanu związanego w przypadku $l = 0$.
Wskazówka:

a) zapisać równanie Schrödingera we współrzędnych sferycznych,
b) wyprowadzić równanie na pomocniczą funkcję $u(r) = rR(r)$,
c) wprowadzić nową zmienną w postaci $\rho = e^{-r/2a}$.

5.4. Proszę wyznaczyć potencjał $V(r, z)$ pola elektrostatycznego wewnątrz cylindra. Potencjały podstaw $z = 0$ i $z = l$ są równe zeru, a potencjał powierzchni bocznej $r = a$ wynosi $V_0 > 0$.
Wskazówka:
Ogólne rozwiązanie równania radialnego to kombinacja liniowa funkcji: $I_0(kr)$ i $K_0(kr)$, gdzie $I_0(kr)$ – zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu, $K_0(kr)$ – zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu.

5.5. Płaski krążek o promieniu a leży w płaszczyźnie $x - y$ i $z = 0$. Potencjał krążka wynosi V_0, natomiast reszta płaszczyzny $z = 0$ ma potencjał $V = 0$. Proszę znaleźć potencjał dla $z > 0$.

Bartłomiej Spisak, Marcin Guzik