

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 5

- 5.1. Proszę zastosować metodę separacji zmiennych do równania Laplace'a we współrzędnych kartezjańskich, a następnie skonstruować rozwiązanie ogólne tego równania.
- 5.2. Proszę pokazać, że jeżeli energia potencjalna ma postać separowalną we współrzędnych kartezjańskich, tzn. można ją zapisać w postaci

$$U(\mathbf{r}) = U(x) + U(y) + U(z),$$

to zastosowanie metody separacji zmiennych pozwala sprowadzić niezależne od czasu równania Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

do układu trzech niezależnych równań różniczkowych zwyczajnych.

- 5.3. Proszę zastosować metodę separacji zmiennych do równania Laplace'a we współrzędnych sferycznych, a następnie skonstruować rozwiązanie ogólne tego równania.
- 5.4. Proszę zastosować metodę separacji zmiennych do równania Laplace'a we współrzędnych cylindrycznych, a następnie skonstruować rozwiązanie ogólne tego równania.
- 5.5. Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu a utrzymywany jest potencjał $V_0(\vartheta)$. Proszę znaleźć potencjał
- wewnątrz powłoki kulistej,
 - na zewnątrz powłoki kulistej.
- 5.6. Nieskończony walec kołowy o promieniu a jest naładowany elektrycznie w ten sposób, że rozkład potencjału na jego powierzchni zależy od kąta φ , tzn.

$$V(a, \varphi) = f(\varphi),$$

gdzie $f(\varphi)$ jest daną funkcją.

Proszę znaleźć potencjał $V(r, \varphi)$ pola elektrostatycznego:

- wewnątrz walca,
- na zewnątrz walca.

- 5.7. Proszę znaleźć rozkład temperatury w kuli o promieniu R , jeżeli wiadomo, że $T(\mathbf{r})$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0.$$

Temperatura na powierzchni kuli wynosi

$$T(R, \vartheta, \varphi) = T_0 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi,$$

gdzie r, ϑ, φ są współrzędnymi sferycznymi.

Bartłomiej Spitał, Maciej Kałha