29. 05. 2020

# Matematyczne metody fizyki 3

## Zestaw 7

7.1. Proszę wyznaczyć funkcję Greena dla dwuwymiarowego operatora Laplace'a, jeżeli wiadomo że spełnia ona równanie w postaci

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

7.2. Proszę wyrazić rozwiązanie dla dwuwymiarowego równania Helmholtza

$$\nabla^2 y(\mathbf{r}) + q^2 y(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

za pomocą funkcji Greena, a następnie wyznaczyć jej jawną postać.

Wskazówki:

a) Reprezentacja całkowa funkcji Bessela $J_0(x)$ ma postać

$$J_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \; e^{ix\cos\phi}.$$

b) Funkcje Bessela, Hankela i wybrane związki między nimi.

$$H_0^1(x) = J_0(x) + iY_0(x), \quad H_0^2(x) = J_0(x) - iY_0(x), \quad -H_0^2(x) = H_0^1(-x).$$

c) Pożyteczny związek między całkami

$$I_1(\alpha, \xi) = \frac{1}{2} I_2(\alpha, \xi),$$

gdzie całki $I_1(\alpha, \xi)$ oraz $I_2(\alpha, \xi)$ są następująco określone

$$I_1(\alpha, \xi) = \int_0^{+\infty} dx \; \frac{xJ_0(\alpha x)}{x^2 - \xi^2}, \quad I_2(\alpha, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{xH_0^1(\alpha x)}{x^2 - \xi^2}.$$

7.3. Wyznaczenie funkcji Greena dla trójwymiarowego równania Helmholtza

$$\nabla^2 y(\mathbf{r}) + q^2 y(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}),$$

prowadzi do następującej całki

$$I(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; q) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \; \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2 - q^2}.$$

Proszę wykazać, że funkcja Greena określona przez wartość tej całki ma postać

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm iq|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

**7.4.*** Proszę obliczyć w pierwszym przybliżeniu Borna różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie cząstek na potencjale Yukawy

$$U(r) = g^2 \frac{e^{-r/R}}{r},$$

gdzie $R$ jest zasięgiem działania sił jądrowych, $g^2$ stała sprzężenia dla oddziaływania między nukleonami.

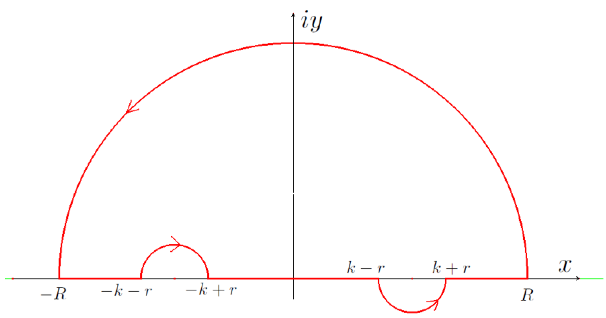
Wskazówki:

a) Należy przeanalizować wyprowadzenie asymptotycznej postaci równania Lippmanna-Schwingera i skoncentować się na czynniku kształtu $F(q)$.

b) Związek między przekrojem czynnym a czynnikiem kształtu jest wyrażony wzorem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(q)|.$$

Uwaga!
Do rozwiązania zadania **7.2.** proszę wykorzystać kontur. Może też być on pomocny do dyskusji zadania **7.3.**.




Kontur całkowania na płaszczyznie zespolonej.

Bartłomiej Spisak, Maciej Kalka