

Mechanika kwantowa

Zestaw 1

- 1.1. Dane są trzy abstrakcyjne wektory stanu - kety $|v_i\rangle$, dla $i = 1, 2, 3$, określone w trójwymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{R})$. W reprezentacji macierzowej ich postać to

$$|v_1\rangle = [2 \ 3 \ -1]^T, \quad |v_2\rangle = [0 \ 1 \ 2]^T, \quad |v_3\rangle = [0 \ 0 \ -5]^T.$$

Proszę wykazać, że mogą one tworzyć bazę w tej przestrzeni. Następnie proszę znaleźć współrzędne keta $|w\rangle = [1 \ 1 \ -1]^T$ względem tej bazy.

Uwaga: Symbol $[\]^T$ oznacza transpozycję macierzy wierszowej.

- 1.2. Niech kety $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ oraz $|u_3\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Proszę obliczyć

- a) $|\phi\rangle + |\psi\rangle$,
- b) $2i|\phi\rangle - |\psi\rangle$,

gdy $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$ mają postać

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4|u_3\rangle, \quad |\phi\rangle = |u_1\rangle + 3i|u_2\rangle - |u_3\rangle.$$

- 1.3 Dla ketów $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$ określonych w zadaniu 1.2. proszę

- a) wyznaczyć $|\ \rangle^*$ oraz $|\ \rangle^\dagger$. Czy kety $|\ \rangle$ oraz $|\ \rangle^\dagger$ należą do tej samej przestrzeni?
- b) obliczyć iloczyny skalarne $\langle\phi|\phi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle$ oraz sprawdzić, czy $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$,
- c) unormować kety $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$,
- d) wykazać, że dla ketów $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$ spełniona jest nierówność Schwarz'a

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle,$$

- e) wykazać, że dla ketów $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$ spełniona jest nierówność trójkąta

$$\sqrt{\langle\psi + \phi|\psi + \phi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle},$$

- f) znaleźć reprezentację macierzową ketów $|\phi\rangle$ oraz $|\psi\rangle$,
- g) obliczyć iloczyny $|\phi\rangle\langle\psi|$ oraz $|\psi\rangle\langle\phi|$ oraz porównać ich ślady.

Uwaga: Symbol $[\]^*$ oznacza sprzężenie zespolone, natomiast symbol $[\]^\dagger$ oznacza sprzężenie hermitowskie rozumiane jako złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego.

- 1.4** Stosując notację Diraca proszę zapisać ogólne wyrażenie na rzut *keta* $|v_i\rangle$ na *keta* $|v_j\rangle$, a następnie proszę znaleźć rzut *keta* $|v_1\rangle$ na *kety* $|v_2\rangle$ oraz $|v_3\rangle$ dla danych z zadania **1.1**.
- 1.5** Proszę sprawdzić, czy *kety* z zadania **1.1** są ortogonalne? Jeżeli nie, to proszę je zortogonalizować stosując procedurę Grama-Schmidta.
- 1.6** Proszę udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza (por. zad. **1.2.d**)
- 1.7** Proszę udowodnić nierówność trójkąta (por. zad. **1.2.e**)
- 1.8** Proszę wykazać, że

$$0 \leq \frac{|\langle \psi | \phi \rangle|^2}{\|\phi\|^2 \|\psi\|^2} \leq 1.$$