

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 2

**2.1.** Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2}, \quad \phi_2(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{6}x\right) e^{-x/3},$$

oraz

$$\phi_3(x) = x \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}x^2\right) e^{-x/3}.$$

Proszę:

- sprawdzić, czy podane funkcje są całkowne z kwadratem,
- znaleźć czynniki normalizacyjne odpowiadające podanym funkcjom,
- zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

We wszystkich przypadkach przyjąć przedział całkowania  $[0, \infty)$ .

Czy funkcje typu

$$\phi_n(x) = W_n(x) e^{-x/n},$$

gdzie  $W_n(x)$  jest wielomianem stopnia  $n$ , mogą być uważane za funkcje falowe?

**2.2** Proszę obliczyć współczynniki rozwinięcia  $c_n$  funkcji  $\psi(x) = x(x-L)$  w szereg

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

korzystając z funkcji bazowych w postaci

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Przedział całkowania  $[0, L]$ .

**2.3** Proszę policzyć kwadraty operatorów:

- $\hat{A} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$ ,
- $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ ,
- $\hat{\Pi} = -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

**2.4** Proszę znaleźć operator różniczkowy  $\hat{T}_a$  przeprowadzający funkcję  $\psi(x)$  w funkcję  $\psi(x+a)$ , czyli

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a).$$

**2.5** Dane są operatory:

$$\hat{A}_u = \frac{d}{dx} + u(x), \quad \hat{A}_v = \frac{d}{dx} + v(x)$$

Proszę obliczyć  $[\hat{A}_u, \hat{A}_v]$  a następnie sformułować wnioski w oparciu o uzyskany wynik?

**2.6** Proszę obliczyć następujące komutatory:

- a)  $[\hat{q}_x^2, \hat{p}_x]$ ,
- b)  $[f(x), \hat{p}_x]$ ,
- c)  $[f(x), \hat{p}_x^2]$ .

Wskazówka:

Operatory  $\hat{x}$  oraz  $\hat{p}_x$  spełniają relacje komutacji w postaci:

- a)  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ ,
- b)  $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$ ,
- c)  $[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0$ .

**2.7** Proszę sprawdzić, które z wymienionych operatorów są hermitowskie:

- a) operator mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą,
- b) operator  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ,
- c) operator  $\hat{q}_x = \frac{d}{dx}$ .

Jakie warunki muszą spełniać funkcje na które działają w/w operatory?

2.8 Wartością oczekiwaną operatora  $\hat{A}$  w stanie  $|\phi\rangle$  nazywamy biliniową formę funkcji  $\phi(x)$  wyrażoną wzorem

$$\langle A \rangle_\phi = \frac{\langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \hat{A} \phi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx |\phi(x)|^2}.$$

Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

- a)  $\hat{A} = \hat{x}$ ,
- b)  $\hat{B} = \frac{d}{dx}$ ,
- c)  $\hat{C} = \frac{d^2}{dx^2}$ ,
- d)  $\hat{D} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$ ,

w stanie reprezentowanym przez funkcję  $\phi(x) = \exp[-\alpha x^2]$ .  
Czy funkcja  $\phi(x)$  jest funkcją własną któregoś z operatorów?

#### UWAGI OGÓLNE:

*Przydatne całki:*

1.  $\int dx x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int dx x^{n-1} \cos ax,$
2.  $\int_0^\infty dx x^n e^{-ax} = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1, a > 0), \\ \frac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0, 1, 2, \dots, a > 0), \end{cases}$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}.$

*Wybrane własności funkcji gamma:*

1.  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$
2.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$
3.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}.$