

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 2

**3.1.** Proszę udowodnić, że zbiór:

- wektorów w przestrzeni trójwymiarowej  $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ ,
- macierzy  $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ,

z działaniami dodawania elementów i mnożenia przez skalary należące do ciała  $\mathbb{R}$  stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ .

**3.2** Proszę zaproponować postać iloczynu skalarnego w przestrzeniach liniowych z poprzedniego zadania.

**3.3** Niech  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  oraz  $|u_3\rangle$  stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych. Proszę obliczyć  $\langle \phi|\phi\rangle$ ,  $\langle \psi|\psi\rangle$  oraz  $\langle \phi|\psi\rangle$ , gdy *abstrakcyjne wektory stanu* mają postać

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4|u_3\rangle, \quad |\phi\rangle = |u_1\rangle + 3i|u_2\rangle - |u_3\rangle,$$

**3.4** Operator  $\hat{H}$  działający w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 3i \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast abstrakcyjne wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + 3i \end{pmatrix}, \quad \langle \phi| = \begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}$$

Proszę:

- obliczyć  $\hat{H}|\psi\rangle$ ,  $\langle \phi|\hat{H}$  oraz  $|\psi\rangle\langle \phi|$ ,
- znaleźć sprzężenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości  $\hat{H}$ ,  $|\psi\rangle$  oraz  $\langle \phi|$ .

**3.5** Z elementów  $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ , które stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujące wyrażenia

$$|\phi_1\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |u_1\rangle - |u_2\rangle.$$

Niech  $\hat{O}$  jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie utworzonej z elementów  $\{|u_n\rangle\}$ , ( $n = 1, 2$ ) ma postać

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną operatora  $\hat{O}$  w stanie  $|\phi_1\rangle$  lub w stanie  $|\phi_2\rangle$ .

**3.6** Uproszczony hamiltonian jonu  $H_2^+$  można zapisać w postaci

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} E & -a \\ -a & E \end{bmatrix},$$

gdzie  $E$  oraz  $a \in \mathbb{R}$ .

Proszę znaleźć wartości własne  $\varepsilon_i$  oraz wektory własne  $|\phi_i\rangle$  hamiltonianu  $\hat{H}$ .

*Bartłomiej Spisak*