

Mechanika kwantowa

Zestaw 2

- 2.1. Niech $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ oraz $|u_3\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych. Proszę obliczyć $\langle\phi|\phi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle$ oraz $\langle\phi|\psi\rangle$, gdy *abstrakcyjne wektory stanu* mają postać

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4|u_3\rangle, \quad |\phi\rangle = |u_1\rangle + 3i|u_2\rangle - |u_3\rangle.$$

- 2.2 Operator $\hat{\mathcal{H}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 3i \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast abstrakcyjne wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + 3i \end{pmatrix}, \quad \langle\phi| = \begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}.$$

Proszę:

- obliczyć $\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle$, $\langle\phi|\hat{\mathcal{H}}$ oraz $|\psi\rangle\langle\phi|$,
 - znaleźć sprzężenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości: $\hat{\mathcal{H}}$, $|\psi\rangle$ oraz $\langle\phi|$.
- 2.3 Z elementów $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, które stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujące wyrażenia

$$|\phi_1\rangle = |u_1\rangle + i|u_2\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |u_1\rangle - |u_2\rangle.$$

Niech $\hat{\mathcal{L}}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie utworzonej z elementów $\{|u_n\rangle\}$, ($n = 1, 2$) ma postać

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną operatora $\hat{\mathcal{L}}$ w stanie $|\phi_1\rangle$ lub w stanie $|\phi_2\rangle$.

- 2.4 Uproszczony hamiltonian jonu H_2^+ można zapisać w postaci

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} E & -a \\ -a & E \end{bmatrix},$$

gdzie E oraz $a \in \mathbb{R}$.

Proszę znaleźć wartości własne ε_i oraz wektory własne $|\phi_i\rangle$ hamiltonianu $\hat{\mathcal{H}}$.