

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 2

- 2.1 Operator  $\hat{\mathbf{A}}$  działający w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 3i \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast abstrakcyjne wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 + 3i \end{bmatrix}, \quad \langle\phi| = \begin{bmatrix} 2 & -i \end{bmatrix}.$$

Proszę:

- znaleźć sprzężenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie operatora  $\hat{\mathbf{A}}$ ,
  - obliczyć  $\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$ ,  $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$  oraz  $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}|\phi\rangle$  lub  $\langle\psi|\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$ .
- 2.2. Niech *kety*  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  oraz  $|u_3\rangle$  stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Operator  $\hat{\mathbf{B}}$  działający w tej przestrzeni jest określony w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}|u_1\rangle &= 2|u_1\rangle, \\ \hat{\mathbf{B}}|u_2\rangle &= 3|u_1\rangle - i|u_2\rangle, \\ \hat{\mathbf{B}}|u_3\rangle &= -|u_2\rangle. \end{aligned}$$

Opierając się na tym przedstawieniu operatora  $\hat{\mathbf{B}}$ , proszę:

- zapisać go w reprezentacji macierzowej,
  - wyrazić go za pomocą iloczynu zewnętrznego.
- 2.3. Niech *kety*  $|0\rangle = [1 \ 0]^T$  oraz  $|1\rangle = [0 \ 1]^T$  stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Proszę znaleźć postać operatora unitarnego  $\hat{\mathbf{O}}$  realizującego następujące przejście:

$$|1\rangle \longrightarrow |0\rangle, \quad |0\rangle \longrightarrow |1\rangle$$

w reprezentacji macierzowej oraz iloczynu zewnętrznego.

Uwaga:

Operator  $\hat{\mathbf{U}}$  jest nazywany unitarnym wtedy, gdy zachodzi równość

$$\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^\dagger = \hat{\mathbf{1}} = \hat{\mathbf{U}}^\dagger\hat{\mathbf{U}},$$

gdzie  $\hat{\mathbf{1}}$  jest operatorem jednostkowym.

- 2.4. Niech  $|u_1\rangle$  oraz  $|u_2\rangle$  stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Operator  $\hat{C}$  w tej bazie ma postać

$$\hat{C} = 2|u_1\rangle\langle u_1| - i|u_1\rangle\langle u_2| + i|u_2\rangle\langle u_1| + 2|u_2\rangle\langle u_2|.$$

Proszę:

- a) znaleźć wartości własne i wektory własne operatora  $\hat{C}$  i pokazać, że uzyskane wektory własne spełniają relację zupełności,
  - b) znaleźć transformację unitarną która diagonalizuje operator  $\hat{C}$ .
- 2.5. Niech *ket*y  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  oraz  $|u_3\rangle$  stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Rozpatrywany układ znajduje się w stanie opisanym *ketem* w postaci

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4i|u_3\rangle.$$

Proszę znaleźć wartość oczekiwaną operatora  $\hat{D}$  określonego wzorem

$$\hat{D} = |u_1\rangle\langle u_1| - 2i|u_1\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|$$

w stanie  $|\psi\rangle$ .