23. 03. 2022

Mechanika kwantowa

Zestaw 2

2.1 Operator $\hat{\mathbf{A}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3+2i & 3i \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast abstrakcyjne wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 2+3i \end{bmatrix}, \quad \langle\phi| = \begin{bmatrix} 2 & -i \end{bmatrix}.$$

Proszę:

a) znaleźć sprzeżenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie operatora $\hat{\mathbf{A}}$,

b) obliczyć $\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$, $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}$, $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$ oraz $\langle\phi|\hat{\mathbf{A}}|\phi\rangle$ lub $\langle\psi|\hat{\mathbf{A}}|\psi\rangle$.

2.2. Dany jest operator różniczkowy $\hat{\mathbf{D}} = d/dx$ oraz dwie funkcje różniczkowalne: $\phi_1(x) = (1/\sqrt{\pi})\cos nx$ oraz $\phi_2(x) = (1/\sqrt{\pi})\sin nx$, spełniające warunek ortonormalności w przedziale $[-\pi, \pi]$. Stosując metody algebraiczne, proszę sprawdzić, czy operator $\hat{\mathbf{D}}$ jest hermitowski, a następnie sprawdzić hermitowskość operatora $\hat{\mathbf{P}} = -id/dx$ stosując to samo podejście.

2.3. Niech *kety* $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ oraz $|u_3\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Operator $\hat{\mathbf{B}}$ działający w tej przestrzeni jest określony w nastęujacy sposób:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}|u_1\rangle &= 2|u_1\rangle, \\ \hat{\mathbf{B}}|u_2\rangle &= 3|u_1\rangle - i|u_2\rangle, \\ \hat{\mathbf{B}}|u_3\rangle &= -|u_2\rangle. \end{aligned}$$

Opierając się na tym przedstawieniu operatora $\hat{\mathbf{B}}$, proszę:

a) zapisać go w reprezentacji macierzowej,

b) wyrazić go za pomocą iloczynu zewnętrznego.

2.4. Niech *kety* $|0\rangle = [1 \quad 0]^T$ oraz $|1\rangle = [0 \quad 1]^T$ stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Proszę znaleźć postać operator unitarnego $\hat{\mathbf{O}}$ realizującego następujące przejście:

$$|1\rangle \longrightarrow |0\rangle, \quad |0\rangle \longrightarrow |1\rangle$$

w reprezentacji macierzowej oraz iloczynu zewnętrznego.

Uwaga:

Operator $\hat{\mathbf{U}}$ jest nazywany unitarnym wtedy, gdy zachodzi równość

$$\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^\dagger = \hat{\mathbb{1}} = \hat{\mathbf{U}}^\dagger\hat{\mathbf{U}},$$

gdzie $\hat{\mathbb{1}}$ jest operatorem jednostkowym.

2.5. Niech $|u_1\rangle$ oraz $|u_2\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Operator $\hat{\mathbf{C}}$ w tej bazie ma postać

$$\hat{\mathbf{C}} = 2|u_1\rangle\langle u_1| - i|u_1\rangle\langle u_2| + i|u_2\rangle\langle u_1| + 2|u_2\rangle\langle u_2|.$$

Proszę:

a) znaleźć wartości własne i wektory własne operatora $\hat{\mathbf{C}}$ i pokazać, że uzyskane wektory własne spełniają relację zupełności,

b) znaleźć transformację unitarną która diagonalizuje operator $\hat{\mathbf{C}}$.

2.6. Niech *kety* $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ oraz $|u_3\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Rozpatrywany układ znajduje się w stanie opisanym *ketem* w postaci

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4i|u_3\rangle.$$

Proszę znaleźć wartość oczekiwaną operatora $\hat{\mathbf{D}}$ określonego wzorem

$$\hat{\mathbf{D}} = |u_1\rangle\langle u_1| - 2i|u_1\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|$$

w stanie $|\psi\rangle$.

B. Spiłak