01. 04. 2013

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

3.1. Proszę udowodnić, że zbiór:

a. wektorów w przestrzeni trójwymiarowej $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$,

b. macierzy $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

c. funkcji $\mathcal{V}(\mathbb{R}) = \{f \in C[a,b] : \quad f(a) = f(b) = 0\}$,

z działaniami dodawania elementów i mnożenia przez skalary należące do ciała $\mathbb{R}$ stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathcal{V}(\mathbb{R})$.

3.2 Niech $| u_1 >$, $| u_2 >$ oraz $| u_3 >$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych. Proszę obliczyć $< \phi|\phi >$, $< \psi|\psi >$ oraz $< \phi|\psi >$, gdy *abstrakcyjne wektory stanu* mają postać

$$| \psi >= 2i| u_1 > -| u_2 > +4| u_3 >, \quad | \phi >= | u_1 > +3i| u_2 > -| u_3 >,$$

3.3 Operator $\hat{H}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 3+2i & 3i \\ -3i & 1 \end{bmatrix},$$

natomiast abstrakcyjne wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi >= \begin{pmatrix} 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \qquad < \phi| = \begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}$$

Proszę:

a. obliczyć $\hat{H}|\psi >$, $< \phi|\hat{H}$ oraz $|\psi >< \phi|$,

b. znaleźć sprzeżenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości $\hat{H}$, $|\psi >$ oraz $< \phi|$.

3.4 Z elementów $| u_1 >, | u_2 >$, które stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujęce wyrażenia

$$| \phi_1 >= | u_1 > +i| u_2 >, \quad | \phi_2 >= | u_1 > -| u_2 > .$$

Niech $\hat{O}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie utworzonej z elementów $\{| u_n >\}, (n = 1, 2)$ ma postać

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną operatora $\hat{O}$ w stanie $|\phi_1 >$ lub w stanie $|\phi_2 >$.

3.5 Niech elementy $| u_1 >, | u_2 >$ oraz $| u_3 >$, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ i niech $\hat{O}$ jest operatorem liniowym działającym w tej przetrzeni takim, że:

$$\hat{O}| u_1 >= 2| u_1 >, \quad \hat{O}| u_2 >= 3| u_1 > -i| u_3 >, \quad \hat{O}| u_3 >= -| u_2 >$$

Proszę znaleźć reprezentację macierzową tego operatora w rozpatrywanej bazie $\{| u_n >\}$.

3.6 Uproszczony hamiltonian jonu H_2^+ można zapisać w postaci

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} E & -a \\ -a & E \end{bmatrix},$$

gdzie E oraz $a \in \mathbb{R}$.
Proszę znaleźć wartości własne ε_i oraz wektory własne $|\phi_i >$ hamiltonianu $\hat{H}$.

Bartłomiej Spisak