11. 03. 2016

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

3.1. Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2}, \ \phi_2(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{6}x\right)e^{-x/2},$$

oraz

$$\phi_3(x) = x\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}x^2\right)e^{-x/3}.$$

Proszę:

a) sprawdzić, czy podane funkcje są całkowalne z kwadratem,

b) znaleźć czynniki normalizacyjne odpowiadające podanym funkcjom,

c) zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

We wszystkich przypadkach przyjąć przedział całkowania $[0, \infty)$.
Czy funkcje typu

$$\phi_n(x) = W_n(x)e^{-x/n},$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, mogą być uważane za funkcje falowe stanów związanych?

3.2 Proszę obliczyć współczynniki rozwinięcia c_n funkcji $\psi(x) = x(x-L)$ określonej na przedziale $[0, L]$ w szereg

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

korzystając z funkcji bazowych w postaci

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

3.3 Proszę policzyć kwadraty operatorów:

a) $\hat{\mathcal{A}} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$,

b) $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$,

c) $\hat{\mathbf{\Pi}} = -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

3.4 Proszę znaleźć operator różniczkowy $\hat{\mathcal{T}}_a$ przeprowadzający funkcję $\psi(x)$ w funkcję $\psi(x+a)$, czyli

$$\hat{\mathcal{T}}_a \psi(x) = \psi(x+a).$$

3.5 Dane są operatory:

$$\hat{\mathcal{A}}_u = \frac{d}{dx} + u(x), \qquad \hat{\mathcal{A}}_v = \frac{d}{dx} + v(x).$$

Proszę obliczyć $[\hat{\mathcal{A}}_u, \hat{\mathcal{A}}_v]$, a następnie zastanowić się jakie wnioski można sformułować w oparciu o uzyskany wynik?

3.6 Proszę obliczyć następujące komutatory:

a) $[\hat{x}^2, \hat{p_x}]$,

b) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}]$,

c) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}^2]$.

Wskazówka:
Operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p_x}$ spełniają relacje komutacji w postaci:

a) $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$,

b) $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$,

c) $[\hat{p_x}, \hat{p_x}] = 0$.

3.7 Proszę sprawdzić, które z wymienionych operatorów są hermitowskie:

a) operator mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą,

b) operator $\hat{p_x} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$,

c) operator $\hat{q_x} = \dfrac{d}{dx}$.

Jakie warunki muszą spełniać funkcje na które działają w/w operatory?

3.8 Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

a) $\hat{\mathcal{A}} = \hat{x}$,

b) $\hat{\mathcal{B}} = \dfrac{d}{dx}$,

c) $\hat{\mathcal{C}} = \dfrac{d^2}{dx^2}$,

d) $\hat{\mathcal{D}} = \dfrac{d}{dx} + \hat{x}$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = A\exp[-\alpha x^2]$, gdzie A jest stałą normalizacyjną, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z tych operatorów?

UWAGI OGÓLNE:

Przydatne całki:

1. $$\int dx\ x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int dx\ x^{n-1}\cos ax,$$

2. $$\int_0^\infty dx\ x^n e^{-ax} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1,\quad a > 0), \\ \dfrac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad a > 0), \end{cases}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

4. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} (\frac{\pi}{\alpha})^{1/2}$.

Wybrane własności funkcji gamma:

1. $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

2. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

3. $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!2^{2n}}.$$

Bartłomiej Spisak