

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

3.1. Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2}, \quad \phi_2(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{6}x\right) e^{-x/2},$$

oraz

$$\phi_3(x) = x \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}x^2\right) e^{-x/3}.$$

Proszę:

- sprawdzić, czy podane funkcje są całkowalne z kwadratem,
- znaleźć czynniki normalizacyjne odpowiadające podanym funkcjom,
- zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

We wszystkich przypadkach przyjąć przedział całkowania $[0, \infty)$.

Czy funkcje typu

$$\phi_n(x) = W_n(x) e^{-x/n},$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n , mogą być uważane za funkcje falowe stanów związanych?

3.2 Proszę obliczyć współczynniki rozwinięcia c_n funkcji $\psi(x) = x(x-L)$ określonej na przedziale $[0, L]$ w szereg

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

korzystając z funkcji bazowych w postaci

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

3.3 Proszę policzyć kwadraty operatorów:

- $\hat{A} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$,
- $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$,
- $\hat{\Pi} = -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

3.4 Proszę znaleźć postać operatora różniczkowego $\hat{\mathcal{T}}_a$ określonego równaniem

$$\hat{\mathcal{T}}_a|x\rangle = |x+a\rangle$$

w reprezentacji położeniowej.

3.5 Dane są operatory:

$$\hat{\mathcal{A}}_u = \frac{d}{dx} + u(x), \quad \hat{\mathcal{A}}_v = \frac{d}{dx} + v(x).$$

Proszę obliczyć $[\hat{\mathcal{A}}_u, \hat{\mathcal{A}}_v]$, a następnie zastanowić się jakie wnioski można sformułować w oparciu o uzyskany wynik?

3.6 Proszę obliczyć następujące komutatory:

- a) $[\hat{x}^2, \hat{p}_x]$,
- b) $[f(\hat{x}), \hat{p}_x]$,
- c) $[f(\hat{x}), \hat{p}_x^2]$.

Wskazówka:

Operatory \hat{x} oraz \hat{p}_x spełniają relacje komutacji w postaci:

- a) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$,
- b) $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$,
- c) $[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0$.

3.7 Proszę sprawdzić, które z wymienionych operatorów są hermitowskie:

- a) operator mnożenia funkcji przez liczbę rzeczywistą,
- b) operator $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$,
- c) operator $\hat{q}_x = \frac{d}{dx}$.

Jakie warunki muszą spełniać funkcje na które działają w/w operatory?

3.8 Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

- a) $\hat{\mathcal{O}} = \hat{x}$,
- b) $\hat{\mathcal{Q}} = \frac{d}{dx}$,
- c) $\hat{\mathcal{D}} = \frac{d^2}{dx^2}$,
- d) $\hat{\mathcal{A}} = \frac{d}{dx} + \hat{x}$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = A \exp[-\alpha x^2]$, gdzie A jest stałą normalizacyjną, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z tych operatorów?

UWAGI OGÓLNE:

Przydatne całki:

$$1. \quad \int dx x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int dx x^{n-1} \cos ax,$$

$$2. \quad \int_0^\infty dx x^n e^{-ax} = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1, a > 0), \\ \frac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0, 1, 2, \dots, a > 0), \end{cases}$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^\infty dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^\infty dx (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Wybrane własności funkcji gamma:

$$1. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$2. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$3. \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}.$$