

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

- 3.1 Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2, \dots, n$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Przyjmując, że dowolny element macierzowy operatora $\hat{\mathbf{A}}$ w tej bazie ma postać $A_{ij} = \langle \phi_i | \hat{\mathbf{A}} | \phi_j \rangle$ proszę wykazać, że operator $\hat{\mathbf{A}}$ może być zapisany w postaci

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} |\phi_i\rangle \langle \phi_j|.$$

- 3.2. Niech $|\phi\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\mathbf{A}}$ i niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest dowolnym operatorem. Proszę obliczyć wartość oczekiwaną komutatora $[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]$ w stanie $|\phi\rangle$.
- 3.3. Proszę wykazać, że wartości własne operatora unitarnego są zespolone i leżą na jednostkowym okręgu.
- 3.4. Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_2(\mathbb{C})$. Operator $\hat{\mathbf{H}}$ w tej bazie ma postać

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \epsilon & v \\ v & \epsilon \end{bmatrix},$$

gdzie $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proszę znaleźć reprezentację macierzową operatora $\hat{\mathbf{H}}$ w bazie utworzonej ze stanów $|\phi'_i\rangle$, dla $i = 1, 2$ wygenerowanej przekształceniem liniowym takim, że

$$|\phi'_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle), \quad |\phi'_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle).$$

- 3.5. Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2, \dots, n$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Operator rzutowy $\hat{\mathbf{P}}_i$ jest określony wzorem

$$\hat{\mathbf{P}}_i := |\phi_i\rangle \langle \phi_i|.$$

Proszę wyznaczyć wartości własne tego operatora oraz wykazać jego następujące własności

- $\hat{\mathbf{P}}_i^\dagger = \hat{\mathbf{P}}_i$,
- $\hat{\mathbf{P}}_i^2 = \hat{\mathbf{P}}_i$,
- $\hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{P}}_i$,
- $\langle \psi | \hat{\mathbf{P}}_i \psi \rangle = \|\hat{\mathbf{P}}_i \psi\|^2$.

3.6. Proszę sprawdzić, czy operator \hat{Q} określony wzorem

$$\hat{Q} := \hat{I} - \hat{P}$$

jest operatorem rzutowym, gdy \hat{P} jest operatorem rzutowym.

3.7. Proszę wykazać, że operator rzutowy \hat{P} może być użyty do rozdzielenia stanu $|\chi\rangle$ na sumę dwóch ortogonalnych wyrazów.