26. 03. 2022

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

3.1. Proszę wykazać, że wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste.

3.2. Proszę wykazać, że wektory własne operatora hermitowskiego odpowiadające różnym wartościom włąsnym są ortogonalne.

3.3. Proszę pokazać, że jeżeli operatory hermitowskie $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ komutują ze sobą i widmo jednego z nich jest niezdegenerowane, to istnieje przynajmniej jedna baza w której te operatory są diagonalne.

3.4. Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_2\,(\mathbb{C})$. Operator $\hat{\mathbf{H}}$ w tej bazie ma postać

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \epsilon & v \\ v & \epsilon \end{bmatrix},$$

gdzie $v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Proszę znaleźć reprezentację macierzową operatora $\hat{\mathbf{H}}$ w bazie utworzonej ze stanów $|\phi_i'\rangle$, dla $i = 1, 2$ wygenerowanej przekształceniem liniowym takim, że

$$|\phi_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle\right), \quad |\phi_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle\right).$$

3.5. Niech $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ jest trójwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech dane są operatory

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

działające na tej przestrzeni. Rozwiązanie zagadnień własnych dla tych operatorów, tzn. $\hat{\mathbf{A}}|a\rangle = a\hat{\mathbb{1}}|a\rangle$ oraz $\hat{\mathbf{B}}|b\rangle = a\hat{\mathbb{1}}|b\rangle$ prowadzi do następujących wartości własnych i wektorów własnych

a) dla wartości własnych operatora $\hat{\mathbf{A}}$: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{2}$ oraz $a_3 = -\sqrt{2}$ mamy odpowiednio unormowane wektory własne

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |a_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |a_3\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

b) dla wartości własnych operatora $\hat{\mathbf{B}}$: $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ oraz $b_3 = -1$ mamy odpowiednio unormowane wektory własne

$$|b_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |b_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Proszę:

a) pokazać, że każdy ze zbiorów wektorów własnych $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^3$ oraz $\{|b_i\rangle\}_{i=1}^3$ tworzy bazę zupełną,

b) znaleźć operator przekształcenia $\hat{\mathbf{U}}$, przy przejściu od bazy $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^3$ do bazy $\{|b_i\rangle\}_{i=1}^3$ oraz sprawdzić, czy spełniona jest równość $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{U}}^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$,

c) znaleźć postać operatora $\hat{\mathbf{A}}$ pod wpływem transformacji podobieństwa generowanej operatorem $\hat{\mathbf{U}}$.

3.6. Proszę wykazać, że wartości własne operatora unitarnego są zespolone i leżą na jednostkowym okręgu, a wektory własne są ortogonalne.

B. Spisak