

Mechanika kwantowa

Zestaw 4

- 4.1.** Funkcje falowe $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ oraz energie E_1, E_2, \dots są odpowiednio funkcjami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu \hat{H} . Proszę obliczyć wartość oczekiwaną $\langle H \rangle_\psi$ w stanie opisanym funkcją falową $\psi(x)$, jeżeli liniowa kombinacja

$$\psi(x) = \sum_{i=1} a_i \phi_i(x)$$

nie jest funkcją własną hamiltonianu \hat{H} .

- 4.2** Cząstka o masie m jest uwięziona w nieskończonej studni potencjału o szerokości L . Funkcja falowa odpowiadająca stanowi tej cząstki ma postać:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Proszę:

- znaleźć stałą A ,
- podać jakie są możliwe wyniki pomiaru energii i jakie są ich prawdopodobieństwa.

Wskazówka: Funkcje własne i wartości własne dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału mają postać:

$$\psi_n(x) = A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

- 4.3** Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\psi(x) = A \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ e^{\beta x}, & x < 0 \end{cases}$$

Proszę:

- unormować funkcję $\psi(x)$,
- obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między $x = 1/\beta$, a $x = 2/\beta$.

4.4 Proszę wyprowadzić równanie ciągłości, zakładając, że potencjał $V(x) = \Re\{V(x)\}$ jest rzeczywisty.

4.5 Proszę pokazać, że gęstość prądu prawdopodobieństwa związana z funkcją falową

$$\psi_i(x, t) = |\psi(x, t)| \exp[i\vartheta(x, t)], \quad \text{gdzie } \vartheta(x, t) \text{ jest funkcją rzeczywistą}$$

wyraża się wzorem

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{m} |\psi(x, t)|^2 \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}.$$

Bartłomiej Spisak