

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 4

- 4.1. Funkcje falowe  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  oraz energie  $E_1, E_2, \dots$  są odpowiednio funkcjami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu  $\hat{H}$ . Proszę obliczyć wartość oczekiwaną  $\langle H \rangle_\psi$  w stanie opisanym funkcją falową  $\psi(x)$ , jeżeli liniowa kombinacja

$$\psi(x) = \sum_{i=1} a_i \phi_i(x)$$

nie jest funkcją własną hamiltonianu  $\hat{H}$ .

- 4.2 Cząstka o masie  $m$  jest uwięziona w nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$ . Funkcja falowa odpowiadająca stanowi tej cząstki ma postać:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Proszę:

- znaleźć stałą  $A$ ,
- podać jakie są możliwe wyniki pomiaru energii i jakie są ich prawdopodobieństwa.

Wskazówka: Funkcje własne i wartości własne dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału mają postać:

$$\psi_n(x) = A \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

- 4.3 Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\psi(x) = A \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ e^{\beta x}, & x < 0 \end{cases}$$

Proszę:

- unormować funkcję  $\psi(x)$ ,
- obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między  $x = 1/\beta$ , a  $x = 2/\beta$ .

4.4 Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

$$\text{a) } d_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } |x| < 1/(2n) \\ 0, & \text{dla } |x| > 1/(2n), \end{cases}$$

$$\text{b) } d_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp[-n^2 x^2],$$

$$\text{c) } d_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk \exp[ikx],$$

$$\text{d) } d_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2},$$

można użyć do określenia dystrybucji  $\delta$ -Diraca.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt c) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów, jeden do wyboru. Ponadto proszę wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0).$$

4.5 Cząstka swobodna jest opisana funkcją falową w postaci

$$\psi(x) = A e^{-\alpha x^2}.$$

Proszę:

- znaleźć jej rozwinięcie na stany z określonym pędem,
- sprawdzić czy rozwinięcie jest poprawne.

*Bartłomiej Spisak*