

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 4

- 4.1. Funkcje falowe  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  oraz energie  $E_1, E_2, \dots$  są odpowiednio funkcjami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu  $\hat{\mathcal{H}}$ . Proszę obliczyć wartość oczekiwaną  $\langle \mathcal{H} \rangle_\psi$  w stanie opisanym funkcją falową  $\psi(x)$ , jeżeli liniowa kombinacja

$$\psi(x) = \sum_{i=1} a_i \phi_i(x)$$

nie jest funkcją własną hamiltonianu  $\hat{\mathcal{H}}$ .

- 4.2. Cząstka o masie  $m$  jest uwięziona w nieskończonej studni potencjału o szerokości  $L$ . Funkcja falowa odpowiadająca stanowi tej cząstki ma postać:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Proszę:

- znaleźć stałą  $A$ ,
- podać jakie są możliwe wyniki pomiaru energii i jakie są ich prawdopodobieństwa.

Wskazówka: Funkcje własne i wartości własne dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału mają postać:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

- 4.3 Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\psi(x) = A \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ e^{\beta x}, & x < 0. \end{cases}$$

Proszę:

- unormować funkcję  $\psi(x)$ ,
- obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między  $x = 1/\beta$ , a  $x = 2/\beta$  zakładając, że  $\beta > 0$ .

4.4 \* Proszę wykazać, że ciąg funkcyjny,

$$d_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk \exp[ikx],$$

można użyć do określenia dystrybucji  $\delta$ -Diraca.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0).$$

Wskazówka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \pi.$$

4.5 Cząstka swobodna jest opisana funkcją falową w postaci

$$\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}.$$

Proszę:

- a) znaleźć jej rozwinięcie na stany z określonym pędem,
- b) sprawdzić czy rozwinięcie jest poprawne.

*Bartłomiej Spisak*

---

\*Proszę to zadanie zrobić samodzielnie. Na ćwiczeniach nie będziemy go rozwiązywali, chyba że sprawi ono kłopoty. (Por. ćwiczenia z mmf 3).