30. 03. 2020

Mechanika kwantowa

Zestaw 4

4.1. Proszę wykazać, że

$$f\left(\hat{\mathbf{A}}\right)|\phi\rangle = f(a)\,|\phi\rangle\,,$$

gdy spełnione jest równanie własne operatora $\hat{\mathbf{A}}$

$$\hat{\mathbf{A}}\,|\phi\rangle = a\,|\phi\rangle\,.$$

4.2 Proszę obliczyć następujące komutatory:

a) $[\hat{x}^2, \hat{p_x}]$,

b) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}]$,

c) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}^2]$,

używając jedynie metod algebraicznych.

Wskazówka:
Operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p_x}$ spełniają relacje komutacji w postaci:

a) $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$,

b) $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$,

c) $[\hat{p_x}, \hat{p_x}] = 0$.

4.3 Proszę wykazać, że jeżeli operatory $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ są operatorami samosprzężonymi i każdy z nich ma swój zupełny zbiór wektorów własnych oraz jeżeli $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$, to wtedy istnieje zupełny zbiór wektorów, które są wektorami własnymi $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$.

4.4. Proszę wykazać, że ślad z iloczynu operatorów jest niezmienniczy ze względu na cykliczną zmianę położenia tych operatorów.

4.5. Proszę pokazać, że zachodzi wzór

$$\det e^{\hat{\mathbf{A}}} = e^{\mathrm{Tr}\hat{\mathbf{A}}}$$

a następnie wskazać jakie warnki muszą być spełnione, aby ten wzór był prawdziwy.

4.6. Proszę znaleźć postać formuły Bakera–Campbella–Hausdorffa w przypadku, gdy dla operatorów $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ spełnione są następujące reguły komutacyjne

a) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \hat{\mathbb{0}}$,

b) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \alpha\hat{\mathbb{1}}$, dla $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

B. Spisak