12. 04. 2021

Mechanika kwantowa

Uzupełnienie do Zestawu 3

3.8. Niech kety[1] $|0\rangle$ oraz $|1\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$. Układ kwantowy może znaleźć się w jednym z dwóch następujących stanów

$$|A\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle \text{ oraz } |B\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle\,.$$

Zespół statystyczny charakteryzujący rozpatrywany układ jest przygotowany w ten sposób, że 3/4 stanów znajduje się w stanie $|A\rangle$, natomiast 1/4 stanów w stanie $|B\rangle$. Proszę

a) wyrazić każdy ze stanów $|A\rangle$, $|B\rangle$ za pomocą operatora gęstości,

b) zapisać operator gęstości dla przygotowanego zespołu statystycznego,

c) wyrazić operator gęstości w bazie $|0\rangle\,, |1\rangle$ i podać postać macierzową tego operatora,

d) obliczyć kwadrat operatora gęstości i następnie ślad tego operatora.

e) obliczyć wartość oczekiwaną operatora negacji w stanie opisanym operatorem statystycznym.

Zestaw 4

4.1. Proszę wykazać, że

$$f\left(\hat{\mathbf{A}}\right)|\phi\rangle = f(a)\,|\phi\rangle\,,$$

gdy operator $\hat{\mathbf{A}}$ spełnia równanie własne

$$\hat{\mathbf{A}}\,|\phi\rangle = a\,|\phi\rangle\,.$$

4.2 Proszę obliczyć następujące komutatory:

a) $[\hat{x}^2, \hat{p_x}]$,

b) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}]$,

c) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}^2]$,

używając jedynie metod algebraicznych.

[1]por. Zestaw 2.

Wskazówka:
Operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p_x}$ spełniają relacje komutacji w postaci:

a) $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$,

b) $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$,

c) $[\hat{p_x}, \hat{p_x}] = 0$.

4.3 Proszę wykazać, że jeżeli operatory $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ są operatorami samosprzężonymi i każdy z nich ma swój zupełny zbiór wektorów własnych oraz jeżeli $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$, to wtedy istnieje zupełny zbiór wektorów, które są wektorami własnymi $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$.

Należy osobno rozważyć przypadek niezdegenerowanych i zdegenerowanych wartości własnych.

4.4. Proszę wykazać, że ślad z iloczynu operatorów jest niezmienniczy ze względu na cykliczną zmianę położenia tych operatorów.

4.5. Proszę pokazać, że zachodzi wzór

$$\det e^{\hat{\mathbf{A}}} = e^{\mathrm{Tr}\hat{\mathbf{A}}}$$

a następnie wskazać jakie warnki muszą być spełnione, aby ten wzór był prawdziwy.

4.6. Proszę znaleźć jawną postać formuły Bakera–Campbella–Hausdorffa:

$$e^{\hat{\mathbf{A}}}e^{\hat{\mathbf{B}}} = e^{\hat{\mathbf{Z}}}, \quad \text{dla} \quad \hat{\mathbf{Z}} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}),$$

gdzie $F_n(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ jest jednorodnym wielomianem stopnia n.

- $F_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$,
- $F_2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]/2$,
- $F_3(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = ([\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] - [\hat{\mathbf{B}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]])/12$,
- $\ldots$

w przypadku, gdy dla operatorów $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ spełnione są następujące reguły komutacyjne

a) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \hat{\mathbb{0}}$,

b) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \alpha\hat{\mathbb{1}}$, dla $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

B. Spilak