09. 04. 2022

Mechanika kwantowa

Zestaw 4

4.1. Niech operator $\hat{A}$ spełnia równanie własne

$$\hat{A}\,|\phi\rangle = a\,|\phi\rangle\,.$$

Proszę wykazać, że wektor $|\phi\rangle$ jest również wektorem własnym operatorów $\hat{A}^2$ oraz $\hat{A}^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Korzystając z uzyskanych wyników proszę znaleźć wartości własne operatora wykładniczego $\exp(\hat{A})$. Następnie, proszę zastanowić się jakie warunki powinna spełniać funkcja operatorowa $f\big(\hat{A}\big)$, aby równanie

$$f\big(\hat{A}\big)\,|\phi\rangle = f(a)\,|\phi\rangle\,,$$

było prawdziwe.

4.2 Proszę obliczyć następujące komutatory:

a) $[\hat{x}^2, \hat{p}]$,

b) $[f(\hat{x}), \hat{p}]$,

c) $[f(\hat{x}), \hat{p}^2]$,

używając jedynie metod algebraicznych.

Wskazówka:
Operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p}$ spełniają relacje komutacji w postaci:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad [\hat{x}, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0.$$

4.3 Hamiltonian jednowymiarowego układu izolowanego ma postać

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U\big(\hat{x}\big),$$

Proszę obliczyć komutatory $\big[\hat{x}, \hat{H}\big]$ oraz $[\hat{p}, \hat{H}]$. Następnie, zakładając, że rozpatrywany hamiltonian spełnia równanie własne

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle\,,$$

proszę obliczyć wartość oczekiwaną antykomutatora $\big\{\hat{x}, \hat{p}\big\}$ w stanie własnym hamiltonianu rozpatrywanego układu.

4.4. Proszę wykazać, że dla dwóch niekomutujących operatorów $\hat{A}$ oraz $\hat{B}$ zachodzi wzór
$$\big[\hat{A}, \hat{B}^{-1}\big] = \hat{B}^{-1}\big[\hat{A}, \hat{B}\big]\hat{B}^{-1}.$$
Następnie, na podstawie tego wyniku proszę sformułować zasadę nieoznaczoności dla operatorów $\hat{A} = \hat{p}$ oraz $\hat{B} = \hat{x}^{-1}$.

4.5. Proszę wykazać, że ślad z iloczynu operatorów jest niezmienniczy ze względu na cykliczną zmianę położenia tych operatorów.

4.6. Proszę pokazać, że zachodzi wzór
$$\det e^{\hat{\mathbf{A}}} = e^{\mathrm{Tr}\hat{\mathbf{A}}}$$
i podać warunki jakie muszą być spełnione, aby był on prawdziwy.

4.7. Proszę znaleźć jawną postać formuły Bakera–Campbella–Hausdorffa:
$$e^{\hat{A}}e^{\hat{\mathbf{B}}} = e^{\hat{\mathbf{Z}}}, \quad \text{dla} \quad \hat{\mathbf{Z}} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}),$$
gdzie $F_n(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ jest jednorodnym wielomianem stopnia n.

- $F_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$,
- $F_2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]/2$,
- $F_3(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = ([\hat{\mathbf{A}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]] - [\hat{\mathbf{B}}, [\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}]])/12$,
- $\ldots$

w przypadku, gdy dla operatorów $\hat{\mathbf{A}}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}$ spełnione są następujące reguły komutacyjne

a) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \hat{\mathbb{0}}$,

b) $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right] = \alpha\hat{\mathbb{1}}$, dla $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

4.8. Proszę wykazać, że dla dwóch operatorów $\hat{A}$, $\hat{B}$ oraz rzeczywistego parametru $\epsilon > 0$ zachodzi wzór
$$e^{\epsilon\hat{A}}\hat{B}e^{-\epsilon\hat{A}} = \hat{B} + \big[\hat{A}, \hat{B}\big]\epsilon + \big[\hat{A}, \big[\hat{A}, \hat{B}\big]\,\big]\frac{\epsilon^2}{2} + \big[\hat{A}, \big[\hat{A}, \big[\hat{A}, \hat{B}\big]\,\big]\,\big]\frac{\epsilon^3}{3!} + \ldots$$

B. Spiłak