

Mechanika kwantowa

Zestaw 5

5.1. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

$$\text{a. } d_n(x) = \begin{cases} n, & \text{dla } |x| < 1/(2n) \\ 0, & \text{dla } |x| > 1/(2n), \end{cases}$$

$$\text{b. } d_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp[-n^2 x^2],$$

$$\text{c. } d_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk \exp[ikx],$$

$$\text{d. } d_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2 x^2},$$

można użyć do określenia dystrybucji δ -Diraca.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt c) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów, jeden do wyboru. Ponadto proszę wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0).$$

5.2 Cząstka swobodna jest opisana funkcją falową w postaci

$$\psi(x) = A e^{-\alpha x^2}.$$

Proszę:

- znaleźć jej rozwinięcie na stany z określonym pędem
- sprawdzić czy rozwinięcie jest poprawne.

5.3 Proszę zapisać równanie własne dla operatora energii kinetycznej w reprezentacji pędowej, a następnie uogólnić wynik na przypadek hamiltonianu uwzględniającego operator energii potencjalnej.