11. 04. 2020

Mechanika kwantowa

Zestaw 6

6.1. Niech hamiltonian układu zapisany w obrazie Heisenberga ma postać

$$\hat{\mathbf{H}}_H(t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}_H^2(t)}{2m} + U(\hat{\mathbf{x}}_H(t)).$$

Proszę wykazać, że $\hat{\mathbf{H}}_H(t) = \hat{\mathbf{H}}_S$.

6.2. Niech $\hat{\mathbf{A}}_S$ oraz $\hat{\mathbf{B}}_S$ są operatorami zapisanymi w obrazie Schrödingera i niech spełniają one relację komutacji w postaci

$$\left[\hat{\mathbf{A}}_S, \hat{\mathbf{B}}_S\right] = \alpha\hat{\mathbb{1}}.$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$. Proszę obliczyć komutator

$$\left[\hat{\mathbf{A}}_H(t), \hat{\mathbf{B}}_H(t)\right],$$

gdzie $\hat{\mathbf{A}}_H(t)$ oraz $\hat{\mathbf{B}}_H(t)$ są tymi samymi operatorami co wyżej, ale zapisanymi w obrazie Heisenberga.

6.3 Proszę znaleźć rozwiązanie równań ruchu w obrazie Heisenberga dla hamiltonianu:

a) cząstki swobodnej,

b) cząstki w polu sił stałych takich, że energia potencjalna tej cząstki ma postać $U(x) = -Fx$,

c) cząstki w polu sił liniowych takich, że energia potencjalna tej cząstki ma postać $U(x) = \omega^2 x^2/2$.

Jako warunki początkowe należy przyjąć $\hat{\mathbf{x}}_H(t=0) = \hat{\mathbf{x}}_H(0)$ oraz $\hat{\mathbf{p}}_H(t=0) = \hat{\mathbf{p}}_H(0)$.

6.4. Proszę obliczyć komutatory

$$[\hat{\mathbf{x}}_H(t), \hat{\mathbf{x}}_H(t')], \quad [\hat{\mathbf{x}}_H(t), \hat{\mathbf{p}}_H(t')], \quad [\hat{\mathbf{p}}_H(t), \hat{\mathbf{p}}_H(t')],$$

dla przypadków: a), b), c) z zadania 6.3.

6.5. Niech hamiltonian układu ma postać

$$\hat{\mathbf{H}}(t) = \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{W}}(t),$$

gdzie $\hat{\mathbf{W}}(t)$ reprezentuje poprawkę do hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}_0$ spowodowaną zaburzeniem zależnym od czasu. W obrazie oddziaływania[1] stan układu jest określony wzorem

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}_0 t} |\psi_S(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}(t)t} |\psi_S(0)\rangle := \hat{\mathbf{U}}_0^\dagger(t)\hat{\mathbf{U}}(t) |\psi_S(0)\rangle \,,$$

Proszę znaleźć równanie ruchu dla stanu $|\psi_I(t)\rangle$ w obrazie oddziaływania. Z kolei operator $\hat{\mathbf{A}}$ w obrazie oddziaływania ma postać

$$\hat{\mathbf{A}}_I(t) = \hat{\mathbf{U}}_0^\dagger(t)\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{U}}_0(t).$$

Proszę wykazać, że równanie ruchu dla tego operatora ma postać

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{A}}_I(t) = \left[\hat{\mathbf{A}}_I(t), \hat{\mathbf{H}}_0\right].$$

6.6. Niech operatory $\hat{\mathbf{a}}$ oraz $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ spełniają relację komutacji

$$\left[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger\right] = \hat{\mathbb{1}}.$$

Hamiltonian przesuniętego oscylatora harmonicznego można wyrazić za pomocą tych operatorów w następujący sposób

$$\hat{\mathbf{H}} = \hbar\omega\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}} + \gamma^*\hat{\mathbf{a}} + \gamma\hat{\mathbf{a}}^\dagger =: \hat{\mathbf{H}}_0 + \hat{\mathbf{H}}',$$

gdzie $\gamma \in \mathbb{C}$. Proszę zapisać hamiltonian $\hat{\mathbf{H}}$ w obrazie oddziaływania.

Wskazówka: Przydatne tożsamości operatorowe:

a)
$$e^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{a}}e^{-\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}} = e^{-\alpha}\hat{\mathbf{a}},$$

b)
$$e^{\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{a}}^\dagger e^{-\alpha\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}} = e^{\alpha}\hat{\mathbf{a}}^\dagger,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$.

B. Spiłak

[1] Inaczej Tomanagi-Schwingera, a jeszcze inni używają określenia obraz Diraca.