23. 05. 2014

Mechanika kwantowa

Zestaw 7

7.1 Proszę udowodnić, że

$$[\hat{a}, (\hat{a^\dagger})^m] = m(\hat{a}^\dagger)^{m-1},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}_+$.

7.2 Stan układu kwantowego w reprezentacji liczb obsadzeń można zapisać w postaci:

$$|n\rangle = C_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle,$$

gdzie $|0\rangle$ jest stanem podstawowym rozpatrywanego układu.
Korzystając z definicji stanu, proszę:

a) unormować stany $|n\rangle$ oraz sprawdzić ich ortogonalność,

b) pokazać, że

- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,
- $\hat{a}^{|}n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,

7.3 Niech $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ będzie funkcją operatorów $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ rozwijalną w szereg. Proszę wykazać, że

$$[\hat{a}, f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^\dagger}.$$

7.4 W zagadnieniu 1-D oscylatora harmonicznego operatory $\hat{a}$ oraz $\hat{a}^\dagger$ można wyrazić za pomocą operatorów położenia $\hat{x}$ i pędu $\hat{p}_x$ w następujący sposób

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right),$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right).$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną $\hat{x}^3$ w stanie n.

Uwaga : Algebra operatorów: $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \qquad [\hat{a}, \hat{a}] = \hat{0}, \qquad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = \hat{0}.$$

Bartłomiej Spisak