

Mechanika kwantowa

Zestaw 7

7.1. Proszę udowodnić, że

$$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m(\hat{a}^\dagger)^{m-1},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}_+$.

7.2 Stan układu kwantowego w reprezentacji liczb obsadzeń można zapisać w postaci:

$$|n\rangle = C_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle,$$

gdzie $|0\rangle$ jest stanem podstawowym rozpatrywanego układu.

Korzystając z definicji stanu, proszę:

- unormować stany $|n\rangle$ oraz sprawdzić ich ortogonalność,
- pokazać, że
 - $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$,
 - $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$,

7.3 Niech $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ będzie funkcją operatorów \hat{a} , \hat{a}^\dagger rozwijalną w szereg. Proszę wykazać, że

$$[\hat{a}, f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^\dagger}.$$

7.4 W zagadnieniu 1-D oscylatora harmonicznego operatory \hat{a} oraz \hat{a}^\dagger można wyrazić za pomocą operatorów położenia \hat{x} i pędu \hat{p}_x w następujący sposób

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}_x \right),$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}_x \right).$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną \hat{x}^3 w stanie n .

Uwaga : Algebra operatorów: \hat{a} , \hat{a}^\dagger

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{1}}, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = \hat{\mathbf{0}}, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{0}}.$$