13. 05. 2021

Mechanika kwantowa

Zestaw 7

7.1 Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2},\ \phi_2(x) = x^2\left(1-\frac{1}{6}x\right)e^{-x/3},\ \phi_3(x) = x\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{2}{27}x^2\right)e^{-x/3}.$$

Proszę:

a) sprawdzić, czy podane funkcje są całkowalne z kwadratem,

b) zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

Czy podane funkcje są unormowane? We wszystkich przypadkach należy przyjąć przedział całkowania $[0,\infty)$.

7.2 Proszę unormować następujące funkcje:

$$\phi(x) = x^n e^{-\alpha x},\ \phi(x) = x^n e^{-\alpha x^2},$$

a następnie odpowiedzieć na pytanie, czy mogą być one uznane za funkcje falowe stanów związanych? Odpowiedź proszę uzasadnić.

7.3. Proszę sprawdzić hermitowskość operatorów

a) operator $\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$,

b) operator $\hat{d}_x = \dfrac{d}{dx}$.

7.4. Proszę policzyć kwadraty operatorów zapisanych w reprezentacji położeniowej

a) $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} + x$,

b) $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$,

c) $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

7.5. Proszę policzyć wartości oczekiwane następujących operatorów zapisanych w reprezentacji położeniowej

a) $\hat{B} = x$,

b) $\hat{C} = \dfrac{d}{dx}$,

c) $\hat{D} = \dfrac{d^2}{dx^2}$,

d) $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} + x$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = A \exp\left[-\alpha x^2\right]$, gdzie A jest stałą normalizacyjną, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z tych operatorów?

UWAGI OGÓLNE:
Przydatne całki:

1. $$\int dx\ x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int dx\ x^{n-1}\cos ax,$$

2. $$\int_0^\infty dx\ x^n e^{-ax} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1, \quad a > 0), \\ \dfrac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad a > 0), \end{cases}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

4. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} (\frac{\pi}{\alpha})^{1/2}$.

Wybrane własności funkcji gamma:

1. $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

2. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

3. $$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}.$$

B. Spisak