16. 05. 2013

Mechanika kwantowa

Zestaw 8

8.1. Proszę wykazać, że dla wszystkich jednowymiarowych barier zachodzi

$$T + R = 1,$$

gdzie T jest współczynnikiem transmisji, a R jest współczynnikiem odbicia.

8.2 Rozważmy rozpraszanie fali płaskiej na potencjale różnym od zera w ograniczonym obszarze przestrzeni. Na lewo od tego obszaru funkcja falowa ma postać

$$\psi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

a na prawo ma postać

$$\psi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}.$$

Rozpraszanie można scharakteryzować podając macierz $\hat{M}$, która wiąże ze sobą współczynniki A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Proszę wyrazić współczynniki odbicia i przejścia dla fali padającej z lewej strony przez elementy macierzy $\hat{M}$.

8.3 Proszę wyznaczyć współczynniki transmisji i odbicia dla cząstki padającej na barierę potencjału reprezentowaną przez deltę Diraca.

8.4 Proszę znaleźć ewolucję czasową funkcji falowej nie będącej funkcją własną hamiltonianu.

8.5 Stan układu kwantowego podlega dynamice określonej równaniem w postaci

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

gdzie hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$ generuje ewolucję układu w czasie[1].
Rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy $|\psi(t_0)\rangle$ można symbolicznie zapisać jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

gdzie $\hat{\mathcal{U}}(t - t_0)$ jest operatorem ewolucji czasowej.
Proszę pokazać, że operator ewolucji czasowej można przedstawić w postaci

$$\hat{\mathcal{U}}(t - t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}(t-t_0)}.$$

[1] Dla uproszczenia zakładamy, że hamiltonian nie zależy od czasu.

8.6 Proszę znaleźć *propagator* dla swobodnego równania Schrödingera.
Wskazówka: Funkcję falową w chwili t można wyrazić przez funkcję falową w chwili t' za pomocą wzoru

$$\psi(x,t) = \int dx' \, \mathcal{K}(x,t;x',t')\psi(x',t').$$

Jądro $\mathcal{K}(x,t;x',t')$ tego równania całkowego jest poszukiwanym propagatorem.

8.7 Proszę oszacować energię stanu podstawowego atomu wodoru, wybierając funkcję próbną w postaci:

a. $\Phi(r,\theta,\varphi;\lambda) = A\exp[-\lambda(r/a_B)]$,

b. $\Phi(r,\theta,\varphi;\lambda) = A[\lambda^2 + (r/a_B)^2]^{-1}$,

c. $\Phi(r,\theta,\varphi;\lambda) = A(r/a_B)\exp[-\lambda(r/a_B)]$,

gdzie A – stała normalizacyjna, λ – parametr wariacyjny, a_B – promień Bohra. Jeden podpunkt do wyboru.

8.8 Proszę znaleźć w drugim rzędzie rachunku zaburzeń poprawkę do energii stanu podstawowego oscylatora harmonicznego umieszczonego w stałym jednorodnym polu elektrycznym $\mathcal{E}$.
Wskazówka:
Zapisać operator zaburzenia w reprezentacji liczb obsadzeń.

8.9 W chwili $t = 0$, cząstka jest poddana zaburzeniu zależnemu od czasu, w postaci

$$\hat{W}(t) = x^2 e^{-\epsilon t},$$

gdzie ϵ – *mały* parametr dodatni, $0 \le t < \infty$.
W chwili $t < 0$ cząstka znajduje się w stanie podstawowym niesymetrycznej studni potencjału[2]. Proszę obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w pierwszym stanie wzbudzonym pod wpływem zaburzenia $\hat{W}(t)$ działającego na układ w czasie t.
Wskazówka:
W pierwszym przybliżeniu, prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $|i\rangle$ do stanu $|f\rangle$ w czasie t pod wpływem zaburzenia zależnego od czasu ma postać:

$$P_{i\to f}(t) = \left| -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \langle f|\hat{W}(t')|i\rangle e^{i\omega_{fi}t'} \right|^2,$$

gdzie ω_{fi} jest dana wzorem:

$$\omega_{fi} = \frac{\epsilon_f - \epsilon_i}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\Big[\langle f|\hat{H}_0|f\rangle - \langle i|\hat{H}_0|i\rangle\Big].$$

$\hat{H}_0$ jest hamiltonianem układu niezaburzonego.

Bartłomiej Spisak

[2]Przyjmujemy, że mamy do czynienia z układem jednowymiarowym o ściankach umieszczonych w położeniach $x = 0$ i $x = L$.