

Mechanika kwantowa

Zestaw 8

8.1 Proszę znaleźć ewolucję czasową funkcji falowej nie będącej funkcją własną hamiltonianu.

8.2 Stan układu kwantowego podlega dynamice określonej równaniem w postaci

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

gdzie hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$ generuje ewolucję układu w czasie¹.

Rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy $|\psi(t_0)\rangle$ można symbolicznie zapisać jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

gdzie $\hat{\mathcal{U}}(t - t_0)$ jest operatorem ewolucji czasowej.

Proszę pokazać, że operator ewolucji czasowej można przedstawić w postaci

$$\hat{\mathcal{U}}(t - t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(t-t_0)}.$$

8.3 Proszę wyprowadzić równanie ciągłości, zakładając, że potencjał $V(x) = \Re\{V(x)\}$ jest rzeczywisty.

8.4 Proszę pokazać, że gęstość prądu prawdopodobieństwa związana z funkcją falową

$$\psi_i(x, t) = |\psi(x, t)| \exp[i\vartheta(x, t)], \quad \text{gdzie } \vartheta(x, t) \text{ jest funkcją rzeczywistą}$$

jest wyrażona wzorem

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{m} |\psi(x, t)|^2 \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}.$$

8.5 Proszę wykazać, że dla wszystkich jednowymiarowych barier zachodzi

$$T + R = 1,$$

gdzie T jest współczynnikiem transmisji, a R jest współczynnikiem odbicia.

¹Dla uproszczenia zakładamy, że hamiltonian nie zależy od czasu.

8.6 Rozważmy rozpraszanie fali płaskiej na potencjale różnym od zera w ograniczonym obszarze przestrzeni. Na lewo od tego obszaru funkcja falowa ma postać

$$\psi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

a na prawo ma postać

$$\psi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}.$$

Rozpraszanie można scharakteryzować podając macierz \hat{M} , która wiąże ze sobą współczynniki A, B, C, D

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}.$$

Proszę wyrazić współczynniki odbicia i przejścia dla fali padającej z lewej strony przez elementy macierzy \hat{M} .

8.7 Proszę wyznaczyć współczynniki transmisji i odbicia dla cząstki padającej na barierę potencjału reprezentowaną przez deltę Diraca.

Bartłomiej Spisak