

Mechanika kwantowa

Zestaw 10

10.1. Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2}, \quad \phi_2(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{6}x\right) e^{-x/2}, \quad \phi_3(x) = x \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}x^2\right) e^{-x/3}.$$

Proszę:

- a) sprawdzić, czy podane funkcje są całkowalne z kwadratem,
- b) zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

Czy podane funkcje są unormowane? We wszystkich przypadkach należy przyjąć przedział całkowania $[0, \infty)$.

10.2 Proszę unormować następujące funkcje:

$$\phi(x) = x^n e^{-\alpha x}, \quad \phi(x) = x^n e^{-\alpha x^2},$$

a następnie odpowiedzieć na pytanie, czy mogą być one uznane za funkcje falowe stanów związanych? Odpowiedź proszę uzasadnić.

10.3. Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ e^{\alpha x}, & x < 0. \end{cases}$$

Proszę:

- a) unormować funkcję $\phi(x)$,
- b) obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między $x = 1/\alpha$, a $x = 2/\alpha$ zakładając, że $\alpha > 0$.

10.4. Funkcja falowa dla atomu wodoru w stanie podstawowym ma postać

$$\phi_{1s}(r) = A e^{-r/a_B},$$

gdzie a_0 jest promieniem Bohra. Proszę:

- a) unormować funkcję $\phi_{1s}(x)$,
- b) obliczyć odległość, dla której gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu jest największa.

- 10.5. Proszę znaleźć poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe cząstki o masie m poruszającej się w polu o potencjale

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a \\ \infty, & |x| > a. \end{cases}$$

Proszę sprawdzić jak zmieniają się funkcje własne i wartości własne, gdy przedział zostanie przesunięty z $[-a, a]$ na $[0, 2a]$.

- 10.6. Proszę obliczyć wartość oczekiwaną położenia, kwadratu położenia oraz pędu i kwadratu pędu w stanie podstawowym układu z poprzedniego zadania oraz wyznaczyć odpowiednie dyspersje.

UWAGI OGÓLNE:

Przydatne całki:

$$1. \quad \int dx x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int dx x^{n-1} \cos ax,$$

$$2. \quad \int_0^\infty dx x^n e^{-ax} = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1, a > 0), \\ \frac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0, 1, 2, \dots, a > 0), \end{cases}$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$4. \quad \int_{-\infty}^\infty dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^\infty dx (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}.$$

Wybrane własności funkcji gamma:

$$1. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$2. \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$3. \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}.$$