

Mechanika kwantowa

Zestaw 12

12.1. Zajęcia rozpoczniemy od omówienia metody faktoryzacji. W związku z tym proszę zapoznać się wstępnie rozwiązaniem dla oscylatora harmonicznego. Szczegółowo omówimy to podczas zajęć.

12.2. Proszę udowodnić, że

$$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m(\hat{a}^\dagger)^{m-1},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}_+$.

12.3. Stan układu kwantowego w reprezentacji liczb obsadzeń można zapisać w postaci:

$$|n\rangle = C_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle,$$

gdzie $|0\rangle$ jest stanem podstawowym rozpatrywanego układu.

Korzystając z definicji stanu, proszę:

a) unormować stany $|n\rangle$ oraz sprawdzić ich ortogonalność,

b) pokazać, że

$$- \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

$$- \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

12.4. W zagadnieniu 1-D oscylatora harmonicznego operatory \hat{a} oraz \hat{a}^\dagger można wyrazić za pomocą operatorów położenia \hat{x} i pędu \hat{p}_x zapisanych w reprezentacji położeniowej w następujący sposób

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}_x \right),$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - i \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} \hat{p}_x \right).$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną \hat{x}^3 w stanie n .

12.5. Proszę obliczyć wartość oczekiwaną hamiltonianu oscylatora anharmonicznego

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha x^4$$

w stanie $|n\rangle$ stosując reprezentację liczb obsadzeń.

12.6. Niech $f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ będzie funkcją operatorów \hat{a} , \hat{a}^\dagger rozwijalną w szereg. Proszę wykazać, że

$$[\hat{a}, f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial \hat{a}^\dagger}.$$

Uwaga: Algebra operatorów: \hat{a} , \hat{a}^\dagger

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{1}}, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = \hat{\mathbf{0}}, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{0}}.$$

B. Spisak