16. 10. 2012

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 1
—
grupa IS

1.1. Proszę przeprowadzić dowód procedury ortogonalizacyjnej Grama-Schmidta, stosując notację Diraca.

1.2. Proszę sprawdzić czy zbiór macierzy 2×1, czyli

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

tworzy przestrzeń liniową.

1.3. Proszę zaproponować iloczyn skalarny w tej przestrzeni.

1.4. Proszę zaproponować operator działający w przestrzeni określonej w zad. 1.3. Narzucić warunek hermitowskości operatora.

1.5. Wartością oczekiwaną operatora $\hat{A}$ w stanie $|b\rangle \in \mathcal{H}$ nazywamy iloczyn skalarny wektora $\langle b|$ i wektora $\hat{A}|b\rangle$.
Przyjmijmy:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Proszę wyliczyć wartość oczekiwaną operatora $\hat{A}$ w stanie $|b\rangle$.

1.6. Równaniem własnym operatora $\hat{A}$ nazywamy równanie własne w postaci

$$\hat{A}|a\rangle = \lambda|a\rangle,$$

gdzie $|a\rangle$ jest elementem przestrzeni wektorowej, a λ i $|a\rangle$ są wielkościami szukanymi. Proszę napisać i rozwiązać równanie własne dla operatora określonego w zad. 1.5.

1.7. Niech $| u_i >$, $| u_j >$ oraz $| u_k >$ stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych.
Proszę obliczyć $< \phi|\phi >$, $< \psi|\psi >$ oraz $< \phi|\psi >$, gdy *wektory stanu* mają postać

$$| \psi >= 2i| u_i > -| u_j > +4| u_k >, \quad | \phi >= | u_i > +3i| u_j > -| u_k >,$$

a następnie sprawdzić czy spełniona jest nierówność Schwartza.

$$| < \phi|\psi > |^2 \quad \leq \; < \phi|\phi >< \psi|\psi > .$$

1.8. Operator $\hat{\mathbf{A}}$ działający w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych ma postać

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

natomiast wektory stanu dane są wyrażeniami:

$$|\psi> = \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \qquad <\phi| = \begin{pmatrix} 6 & -i & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Oblicz $\hat{\mathbf{A}}|\psi>$, $<\phi|\hat{\mathbf{A}}$ oraz $|\psi><\phi|$.

b. Proszę znaleźć sprzeżenie zespolone, transpozycję oraz sprzężenie hermitowskie dla wielkości $\hat{\mathbf{A}}$, $|\psi>$ oraz $<\phi|$.

1.9. Z elementów $| u_i >$, $| u_j >$ oraz $| u_k >$, które stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni zespolonej utworzono następujęce wyrażenia

$$| \phi_1 >= | u_i > +i| u_k >, \quad | \phi_2 >= | u_j > -| u_k > .$$

Niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest operatorem liniowym, którego reprezentacja macierzowa w bazie $\{| u_n >\}$ ma postać

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{bmatrix}.$$

Proszę obliczyć wartości oczekiwane $< \phi_1|\hat{\mathbf{B}}|\phi_1 >$ oraz $< \phi_2|\hat{\mathbf{B}}|\phi_2 >$.

1.10. Niech elementy $| u_i >$, $| u_j >$ oraz $| u_k >$, stanowią bazę ortonormalną w przestrzeni liniowej $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ i niech $\hat{\mathbf{C}}$ jest operatorem liniowym działającym w tej przetrzeni takim, że:

$$\hat{\mathbf{C}}| u_i >= 2| u_i >, \quad \hat{\mathbf{C}}| u_j >= 3| u_i > -i| u_k >, \quad \hat{\mathbf{C}}| u_k >= -| u_j > .$$

Proszę znaleźć reprezentację macierzową tego operatora w bazie $\{| u_n >\}$.

1.11. Niech $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \ldots$ oraz energie $E_1, E_2, \ldots$ są odpowiednio stanami własnymi i wartościami własnymi hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$. Proszę obliczyć wartość oczekiwaną $\langle H\rangle_\psi$ w stanie $|\psi\rangle$, jeżeli liniowa kombinacja

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} a_i|\phi_i\rangle$$

nie jest stanem własnym hamiltonianu $\hat{\mathbf{H}}$.

1.12 Niech $\hat{\mathbf{U}}$ jest macierzą unitarną o wymiarze 2×2, taką że

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdzie $\det \hat{\mathbf{U}} = 1$.
Proszę pokazać, że $a^* = d$, $b = -c^*$ oraz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

1.13. Operator typu *bramka Hadamarda* zapisany w reprezentacji macierzowej ma postać:

$$\hat{\mathbf{O}}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Proszę sprawdzić czy $\hat{\mathbf{O}}_H$ jest operatorem unitarnym.

b. Proszę znaleźć wartości własne i wektory własne tego operatora.

1.14. Proszę znaleźć transformację unitarną, która diagonalizuje macierz

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

1.15 Proszę obliczyć iloczyny tensorowe: $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ oraz $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ stanu kwantowego $|\psi\rangle$ wyrażającego się wzorem:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$