22. 11. 2013

Podstawy informatyki kwantowej
Zestaw 2
—
grupa IS

2.1. Proszę znaleźć wartości własne i znormalizowane funkcje własne hamiltonianu

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\epsilon\Big(\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{I}} + \hat{\mathbb{I}} \otimes \hat{\sigma}_z\Big) - \Delta(\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x),$$

gdzie $\epsilon > 0$, $\Delta > 0$, $\hat{\sigma}_i$, dla $i = x, y, z$ są macierzami Pauliego.
Czy wektory własne są stanami splątanymi?

2.2. Proszę znaleźć ewolucję stanu kwantowego nie będącego stanem własnym hamiltonianu.

2.3. Stan układu kwantowego podlega dynamice określonej równaniem w postaci

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle \tag{1}$$

gdzie hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$ generuje ewolucję układu w czasie[1].
Rozwiązanie równania (1) spełniające warunek początkowy $|\psi(t_0)\rangle$ można symbolicznie zapisać jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

gdzie $\hat{\mathcal{U}}(t - t_0)$ jest operatorem ewolucji czasowej.
Proszę pokazać, że operator ewolucji czasowej można przedstawić w postaci

$$\hat{\mathcal{U}}(t - t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}(t-t_0)}.$$

2.4. Hamiltonian dwustanowego układu kwantowego ma postać:

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \omega & \gamma \\ \gamma & \omega \end{bmatrix}$$

gdzie $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$.
Proszę znaleźć ewolucję czasową tego układu zakładając, że w chwili początkowej układ znajdował się w stanie kwantowym $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$, gdzie $|0\rangle^T = [1 \;\; 0]$.

[1] Dla uproszczenia należy założyć, że hamiltonian nie zależy od czasu.

2.5. Wartością oczekiwaną operatora $\hat{A}_i$ w stanie $|\phi\rangle$ nazywamy biliniową formę funkcji $\phi(x)$ wyrażoną wzorem

$$\langle A_i \rangle_\phi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi^*(x)\hat{A}_i\phi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\phi(x)|^2}.$$

Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

(a) $\hat{A}_1 = \hat{x}$,

(b) $\hat{A}_2 = \frac{d}{dx}$,

(c) $\hat{A}_3 = \frac{d^2}{dx^2}$

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = \exp\left[-\alpha x^2\right]$.

2.6. Cząstka o masie m jest uwięziona w nieskończonej studni potencjału o szerokości L. Funkcja falowa odpowiadająca stanowi tej cząstki ma postać:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3}{\sqrt{5L}} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Proszę:

(a) znaleźć stałą A,

(b) podać jakie są możliwe wyniki pomiaru energii i jakie są ich prawdopodobieństwa.

Wskazówka: Funkcje własne i wartości własne dla cząstki uwięzionej w nieskończonej studni potencjału mają postać:

$$\psi_n(x) = A\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

2.7. Funkcja falowa jest dana wzorem

$$\psi(x) = A \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ e^{\beta x}, & x < 0 \end{cases}$$

Proszę:

(a) unormować funkcję $\psi(x)$,

(b) obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze między $x = 1/\beta$, a $x = 2/\beta$.