Informatyka Ir., grupa 8 15 marca 2020 **wskazówki do zestawu (2)**

1. **ad 1**. Proszę mieć zrobione wszystkie zadania z zestawu 1.

2. **ad 2**. Ogólnie:
Dany jest wektor $\vec{a(t)} = (0, 0, a)$ (stały, a nie zależy od czasu). Oznaczmy wektory położenia początkowego $\vec{r}(t = 0) = (x_o, y_o, z_o)$ i prędkości początkowej $\vec{v}(t = 0) = (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz})$. Wektor $\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z)$ dla dowolnej chwili t należy znaleźć z relacji $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, czyli mamy 3 równania dla składowych : $\frac{dv_x}{dt} = 0$, $\frac{dv_y}{dt} = 0$, $\frac{dv_z}{dt} = a$, w których przeprowadzając całkowanie (stosując całkę oznaczoną w granicach od t=0 do t dowolnego, lub nieoznaczoną, dopasowując stałą całkowania do warunków początkowych) uzyskujemy szukane $v_x = v_{ox}$, $v_y = v_{oy}$, $v_z = v_{oz} + at$, czyli wektor prędkości ma postać: $\vec{v}(t) = (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} + at)$.
Podobnie całkując uzyskujemy wektor położenia (wektor wodzący):
$\vec{r}(t) = (r_{ox} + v_{ox}t,\ r_{oy} + v_{oy}t,\ r_{oz} + v_{oz}at + \frac{1}{2}at^2)$.
Te wyniki łatwo było wypisać mając wiedzę ze szkoły, ale jeśli przyspieszenie nie byłoby stałe to już tylko podejście z wykorzystaniem całkowania pozwoliłoby uzyskać rozwiązanie. Wstaw konkretne dane dla uzyskania odpowiedzi.

3. **ad 3**. Stosuj całkowanie, podobnie jak w poprzednim zadaniu.
Odpowiedź: $v(t) = -Ab(1 - \cos bt)$, $x(t) = -A(bt - \sin bt)$. Interpretacja: bt ma wymiar kąta więc b ma charakter prędkości kątowej ω (to widzimy z członu np. $\cos bt$); A ma wymiar długości.

4. **ad 4**. To zadanie jest szczególnie ważne. Prześledź rozwiązanie.
Rozpatrz np. kulkę poruszającą się ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Wchodzi ona do ośrodka (jest to np. jakaś ciecz, powietrze etc.), w którym pojawia się siła oporu hamująca ruch (jako jedyna siła). Siła oporu $\vec{F}$ jest wprost proporcjonalna do aktualnej prędkości, przeciwnie skierowana do kierunku ruchu i wywołująca przyspieszenie (w tym wypadku jest to opóźnienie) równe $\vec{a} = \vec{F}/m = -k\vec{v}(t)$, gdzie k jest stałą dodatnią. To nam pozwala napisać równanie
$$\frac{dv}{dt} = -kv.$$
Czas zaczynamy liczyć od momentu wejścia ($t = 0$) i wtedy prędkość początkowa wynosi v_o.
Szukamy rozwiązania zapisanego równania, czyli funkcji $v(t)$. Występuje ona w dwóch miejscach: po lewej stronie pod znakiem pochodnej, a także po prawej stronie równania. Żadne przekształcenia algebraiczne nie pozwolą uzyskać rozwiązania. Żeby "wyłuskać" szukaną funkcję będąca pod znakiem pochodnej trzeba użyć, jak wiemy, całkowania po zmiennej t. Operacja całkowania równania musi być zastosowana równocześnie do obu stron równania, ale tu UWAGA!!: wiemy, że całkując lewą stronę uzyskamy $v(t) + const$, ale całkowanie prawej $-k \int v(t)\,dt$ jest nie do zrealizowania bo funkcja $v(t)$ jest jeszcze nieznana! - więc jak ją całkować? Wniosek: na całkowanie jest jeszcze za wcześnie.
Zastosujemy standardową technikę zwaną <u>separacją zmiennych</u>, którymi u nas są t i v. Polega ona na tym aby tak przekształcić algebraicznie równanie aby po jednej stronie równania było wyrażenie zawierające w sposób jawny tylko v, a po drugiej wyrażenie zawierające tylko t. Łatwo to zrobić. Pomnóżcie obie strony przez dt, a potem podzielcie przez v:
$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$
Zrobione! Teraz można całkować, wygodniej to robić wykorzystując całkę oznaczoną w granicach (t, v), dolnej $(0, v_o)$ i górnej $(t, v(t))$:
$$\int\limits_{v_o}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int\limits_{0}^{t} t\,dt \quad \rightarrow \quad \ln v\Big|_{v_o}^{v} = -kt\Big|_{0}^{t} \quad \rightarrow \quad \ln v - \ln v_o = \ln\frac{v}{v_o} = -kt,$$
co po przekształceniu daje szukane rozwiązanie: $v(t) = v_o e^{-kt}$. Sporządź wykres tej funkcji.

Zadanie dodatkowe. Rozwiąż metodą separacji zmiennych równanie dla funkcji $v(t)$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t) + g \quad \text{(gdzie } k, g - \text{stałe dodatnie)},$$

przy warunku początkowym $v(t = 0) = 0$. Jest to przykład opisujący spadek swobodny ciała z uwzględnieniem oporu powietrza. Opis rozwiązania tego zadania proszę przesłać mi mailem (adres wozniak@ftj.agh.edu.pl), chętnie w PDF, ew.scan.

5. **ad 5.** Odp.: położenie początkowe i kierunek obiegu.

6. **ad 6.** Odp.: 12

7. **ad 7**. Odp.: czas 1.15 s; współrzędne cząstek $(-0.69, 0)$, $(0, 45)$ cm

8. **ad 8.** Rzut pionowy.

9. **ad 9.** Ruch prostoliniowy jednostajny i jednostajnie zmienny.

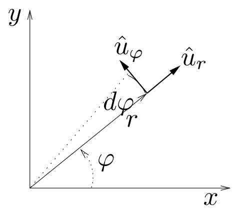
10. **ad 10**. Rzut ukośny. Z danych zadania można zestawić 3 równania dla chwili t, w której osiągnięta jest wysokość 9 m:

    $$9 = v_o \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \text{ [m]}$$
    $$7 = v_o \cos\alpha \text{ [m/s]}$$
    $$6 = v_o \sin\alpha - gt \text{ [m/s]}$$

    Oblicz v_o i α po wyrugowaniu t.

11. **ad 11.** Rzut pionowy.

12. **ad 12.** Układ biegunowy.

    Pierwsza część zadania wynika z powyższego rysunku. Przykładowo, zrzutuj wektor $\hat{u}_r$ na osie układu kartezjańskiego x, y - otrzymasz odpowiednio jego składowe $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$. Podobnie zrób to dla wektora $\hat{u}_\varphi$.

    W drugiej części zauważ po pierwsze, że o ile wersory bazowe układu kartezjańskiego nie zależą od czasu, to przeciwnie, $\hat{u}_r$ i $\hat{u}_\varphi$ mogą zależeć, bo może się zmieniać kąt φ, jeśli opisywany punkt porusza się względem układu x, y. Po drugie, pamiętaj, że różniczkujemy po czasie, w związku z czym przy liczeniu pochodnej np. $\frac{d}{dt}\sin\varphi$ pojawia się teże pochodna funkcji wewnętrznej $\frac{d\varphi}{dt}$, a to jest z def. prędkość kątowa.

13. **ad 13.** Dla obu przypadków a) i b) wystarczy pokazać, że długość wektora wodzącego nie zmienia się w czasie ruchu, $\mid \vec{r}(t) \mid = const$, a to jest nietrudne.

    Wzory na $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ w obu układach uzyskujemy przez różniczkowanie. W temacie nie zastrzeżono, że ma być to ruch jednostajny po okręgu. Rozpatrzymy więc przypadek ogólny, gdy prędkość kątowa ω może zależeć od czasu $\omega = \omega(t)$. Od czasu zależy też kąt $\varphi(t)$,

    układ kartezjański

    $\vec{r}(t) = R\cos\varphi\,\hat{i} + R\sin\varphi\,\hat{j}$
    kolejne różniczkowania po czasie dają (wykonaj te obliczenia):

    $\vec{v} = -R\omega\sin\varphi\,\hat{i} + R\cos\varphi\,\hat{j}$

    $\vec{a} = (-R\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi - R\omega^2\cos\varphi)\hat{i} + (R\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - R\omega^2\sin\varphi)\hat{j}$

układ biegunowy

$\vec{r}(t) = R\,\hat{u}_r$ — widzimy, że w tym układzie wektor wodzący ma tylko jedną składową!
kolejne różniczkowania:

$\vec{v} = R\dfrac{d\hat{u}_r}{dt} = R\omega\hat{u}_\varphi$ — prędkość też ma tylko jedną składową, styczną do toru

$\vec{a} = R\dfrac{d\omega}{dt}\hat{u}_\varphi + R\omega\dfrac{d\hat{u}_\varphi}{dt} = -R\omega^2\hat{u}_r + R\dfrac{d\omega}{dt}\hat{u}_\varphi$ — przyspieszenie ma dwie składowe, dośrodkowe (równoległe do promienia wodzącego) i styczne do toru; wielkość $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ jest przyspieszeniem kątowym

Z powyższych rachunków widać, że układ biegunowy lepiej nadaje się do opisu ruchu krzywoliniowego.